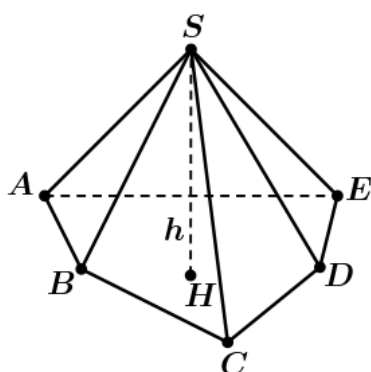
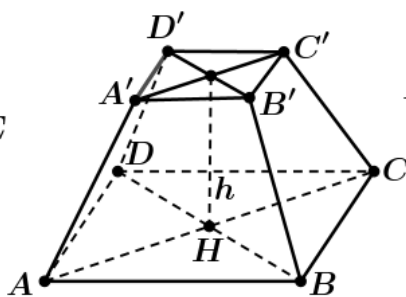


1 Lý thuyết chung về thể tích

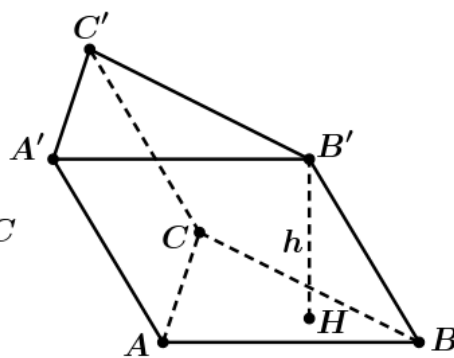
- Thể tích là một trong những khái niệm toán học xuất hiện thường xuyên trong cuộc sống, đo sự chiếm chỗ của vật thể trong không gian. Bài học này đưa ra công thức thể tích của các hình khối ứng với các hình mà ta đã học.
- Phần không gian được giới hạn bởi hình chóp, hình chóp cắt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng được gọi là khối chóp, khối chóp cắt đều, khối lăng trụ, khối hộp. Đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của các khối hình đó lần lượt là đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của hình chóp, hình chóp cắt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng.



$$V = \frac{1}{3}hS$$



$$V = \frac{1}{3}h(S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$$



$$V = hS$$

- Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là: $V = \frac{1}{3}hS$.
- Thể tích của khối chóp cắt đều có diện tích đáy lớn S , diện tích đáy bé S' và chiều cao h là: $V = \frac{1}{3}h(S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$.
- Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = hS$.

Nhận xét:

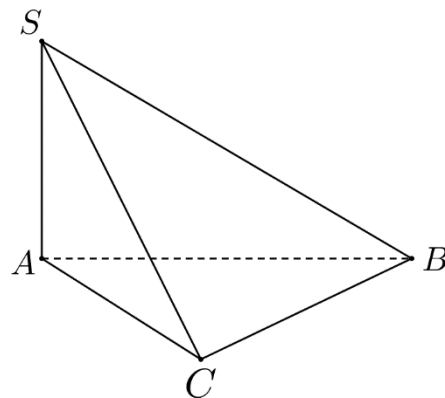
- Thể tích khối tứ diện bằng một phần ba tích của chiều cao từ một đỉnh và diện tích mặt đối diện với đỉnh đó.
- Thể tích của khối hộp bằng tích của diện tích một mặt và chiều cao của khối hộp ứng với mặt đó.

Dạng 1: Thể tích khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

- Một hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy thì cạnh bên đó chính là đường cao.
- Một hình chóp có hai mặt bên kề nhau cùng vuông góc với đáy thì cạnh bên là giao tuyến của hai mặt đó vuông góc với đáy.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Biết $SA = a$, tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

✍ **Lời giải**

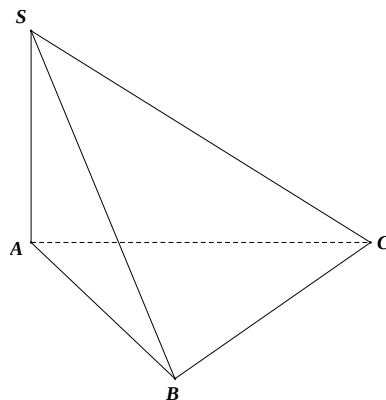


Diện tích tam giác ABC vuông cân tại A là $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} 2a \cdot 2a = 2a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot 2a^2 = \frac{2a^3}{3}$.

Ví dụ 2: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy và $SC = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp bằng

✍ **Lời giải**



$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ (SAB) \perp (ABC) \\ (SAC) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC).$$

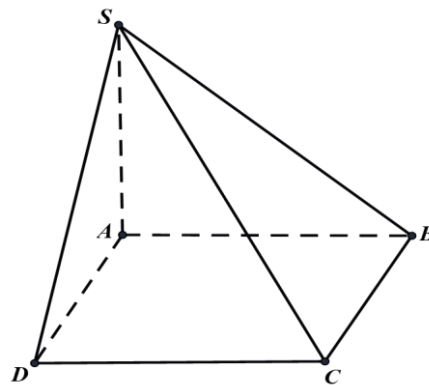
Trong tam giác SAC vuông tại A có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}SA.S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

Lời giải



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ (1)

Vì $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC trên (SAB) .

$\Rightarrow (\widehat{SC, (SAB)}) = (\widehat{SC, SB})$

Vì $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại $B \Rightarrow (\widehat{SC, SB}) = \widehat{BSC} = 30^\circ$.

Ta có $\tan \widehat{BSC} = \frac{BC}{SB} \Rightarrow SB = \frac{BC}{\tan 30^\circ} = 3a$.

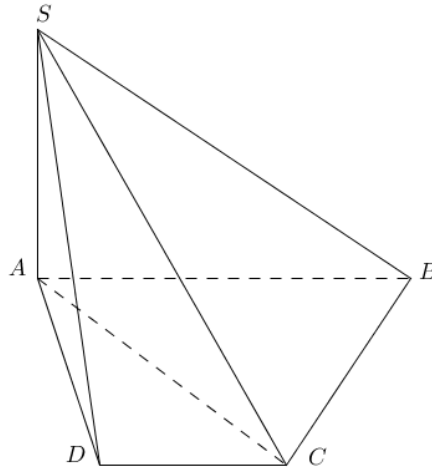
Xét tam giác vuông SAB có $SA^2 = SB^2 - AB^2 = 9a^2 - a^2 = 8a^2 \Rightarrow SA = 2a\sqrt{2}$.

Ta có $S_{ABCD} = AB.BC = \sqrt{3}a^2$.

Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{2}.a^2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

Ví dụ 4: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB // CD$, $SA = AD = DC = a, BC = a\sqrt{7}$. Tam giác SBC vuông tại C , tam giác SCD vuông tại D . Thể tích khối chóp đã cho bằng

Lời giải



Ta có: $\left. \begin{array}{l} CD \perp SA \\ CD \perp SD \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AD \subset (SAD)$

Suy ra, tam giác ACD vuông tại $D \Rightarrow AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

$\left. \begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp SC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AC \subset (SAC)$

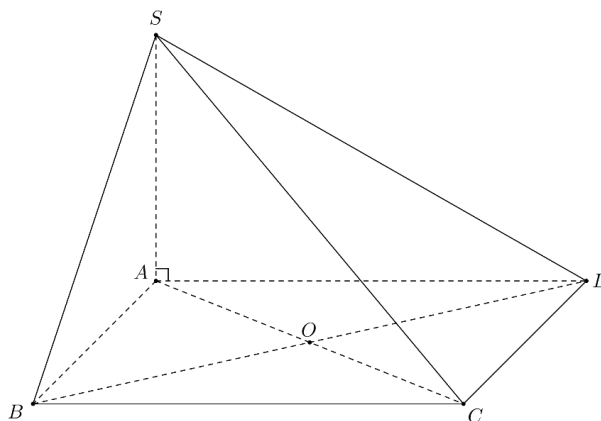
Suy ra, tam giác ABC vuông tại $C \Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2a^2 + 7a^2} = 3a$

Ta có: $S_{ABCD} = \frac{(CD + AB) \cdot AD}{2} = \frac{(a + 3a) \cdot a}{2} = 2a^2$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot 2a^2 = \frac{2}{3}a^3$.

Ví dụ 5: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O ; $AC = 2AB = 2a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết rằng $SD = a\sqrt{5}$.

Lời giải



Ta có: $AC = 2AB = 2a \Rightarrow AB = a$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AB \perp BC$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có: $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} \Leftrightarrow BC = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle SAD$ vuông tại A có: $SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} \Leftrightarrow SA = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - (a\sqrt{3})^2} = a\sqrt{2}$.

Do $SA \perp (ABCD)$ suy ra SA là đường cao của khối chóp.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}SA.AB.BC = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

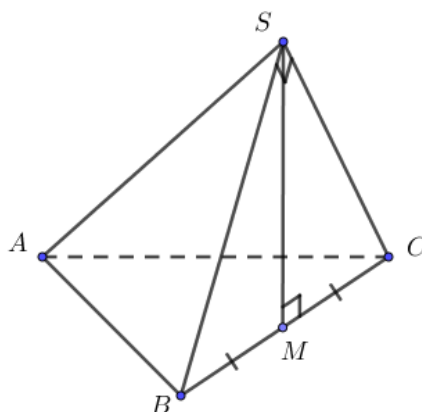
Dạng 2: Thể tích khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Để xác định đường cao của khối chóp, ta sử dụng định lý sau:

$$\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha) \\ a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta)$$

Ví dụ 6: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, mặt bên SBC là tam giác vuông cân tại S và (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Lời giải



Dựng $SM \perp BC$, ta có

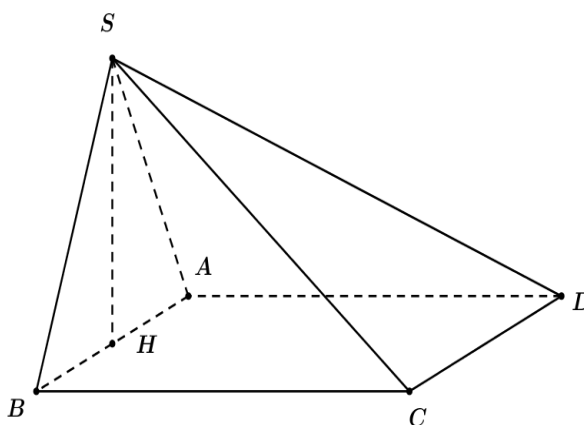
$$\begin{cases} (SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SM \perp BC \\ SM \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow SM \perp (ABC).$$

Do $\triangle SBC$ vuông cân ở S , suy ra $SM = \frac{1}{2}.BC = a$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SM.S_{SBC} = \frac{1}{3}.a.\frac{(2a)^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}.$$

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

Lời giải



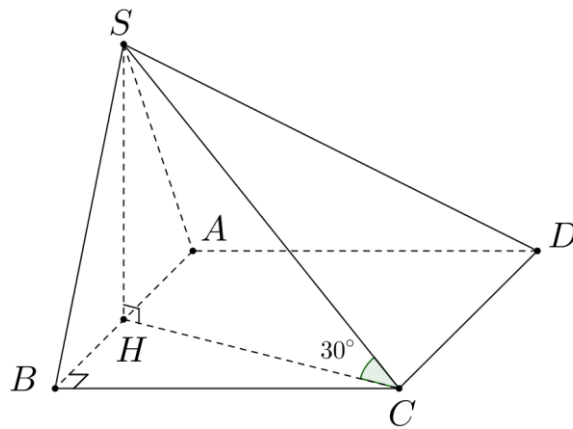
Lấy $H \in AB$ sao cho $SH \perp AB$ (do tam giác SAB đều nên H cũng là trung điểm của AB)

$$\begin{cases} SH \perp AB \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \\ SH \subset (SAB) \\ (SAB) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Ta có $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2a^2$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; $\triangle SAB$ đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Biết SC tạo với $(ABCD)$ một góc bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB . Vì tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$.

$$\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Suy ra $(SC, (ABCD)) = \angle SCH = 30^\circ$.

Vì SH là đường cao của tam giác đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow CH = SH \cdot \cot 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}.$$

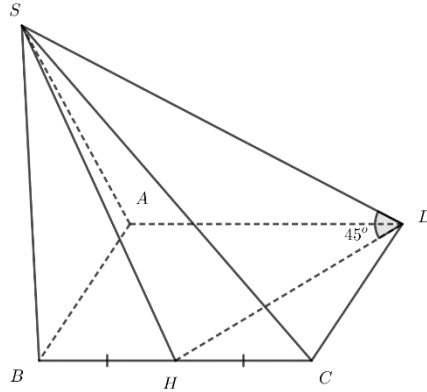
Trong tam giác vuông BHC , ta có: $BC^2 = HC^2 - HB^2 = \frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 2a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

Diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB \cdot BC = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

Vậy thể tích hình chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SBC đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$ biết góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Thể tích hình chóp $S.ABCD$ là

Lời giải



Gọi H là trung điểm của cạnh $BC \Rightarrow SH \perp BC$. Mà $(SBC) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $(SD, (ABCD)) = SDH = 45^\circ$.

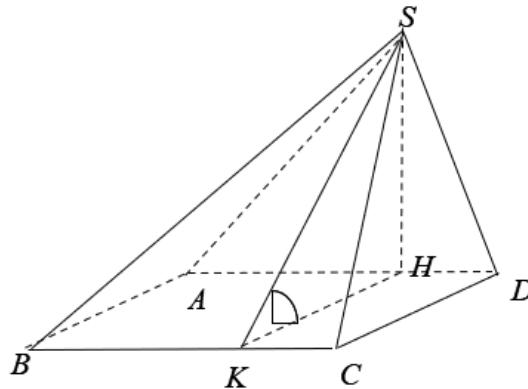
Tam giác SBC đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SHD vuông cân tại $H \Rightarrow HD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $CD = \sqrt{DH^2 - CH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot BC \cdot CD = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAD vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho biết $AB = a$, $SA = 2SD$, mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của S trên AD và K là hình chiếu của H trên BC .

Ta có: $\begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ SH \perp AD \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

$\left. \begin{array}{l} HK \perp BC \\ SH \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp SK$. Do đó góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc

$$SKH = 60^\circ, SH = HK \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

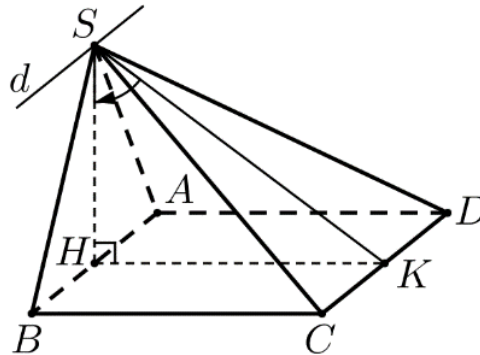
$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SD^2} \Rightarrow \frac{1}{3a^2} = \frac{5}{4SD^2} \Rightarrow SD = \frac{\sqrt{15}a}{2}, SA = a\sqrt{15}, AD = \frac{5\sqrt{3}a}{2}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot a \cdot \frac{5\sqrt{3}a}{2} = \frac{5a^3}{2}.$$

Ví dụ 11: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình chữ nhật $ABCD$ với $AD = 2a$ nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Biết $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

Lời giải



Dễ dàng xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB, CD .

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Trong mặt phẳng (SAB) có $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp d$.

$$\text{Vì } \begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK \Rightarrow d \perp SK.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \cap (SCD) = d \\ SH \perp d, SH \subset (SAB). \text{ Do đó } ((SAB), (SCD)) = (SH, SK) = HSK. \\ SK \perp d, SK \subset (SCD) \end{cases}$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SHK, \text{ có } \tan HSK = \frac{HK}{SH} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \frac{2a}{SH} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow SH = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác đều } SAB \text{ có: } SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{3a\sqrt{2}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AB = a\sqrt{6}$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABC \text{ bằng } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a\sqrt{6} \cdot 2a \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{2} = a^3\sqrt{3}.$$

Dạng 3: Thể tích khối chóp đều

Định nghĩa: Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Trong hình chóp đều:

- Đường cao hình chóp qua tâm của đa giác đáy.
- Các cạnh bên tạo với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau.

Chú ý:

- Đề bài cho hình chóp tam giác đều (tứ giác đều) ta hiểu là hình chóp đều.
- Hình chóp tam giác đều khác với hình chóp có đáy là tam giác đều vì hình chóp tam giác đều thì bản thân nó có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau, nói một cách khác, hình chóp tam giác đều thì suy ra hình chóp có đáy là tam giác đều nhưng điều ngược lại là không đúng.
- Hình chóp tứ giác đều là hình chóp đều có đáy là hình vuông.

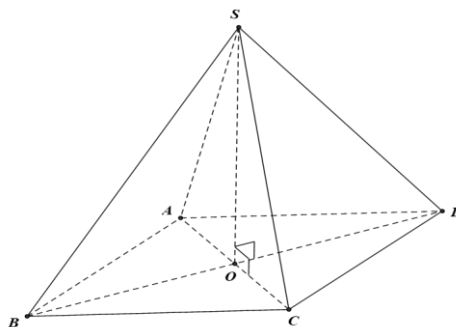
Công thức tính thể tích khối chóp đều và một số công thức giải nhanh:

- Chiều cao h khối chóp xác định bởi $h = \sqrt{b^2 - R_d^2}$, trong đó R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và b là độ dài cạnh bên.
- Khối tứ diện đều cạnh a có $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$ và $V = \frac{\sqrt{3}h^3}{8}$, trong đó $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ là chiều cao khối tứ diện đều.
- Khối chóp tam giác đều cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b có $V = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$
- Khối chóp tứ giác đều cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b có $V = \frac{a^2\sqrt{2(2b^2 - a^2)}}{6}$
- Khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a , có $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$
- Khối bát diện đều cạnh a là hợp của hai khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a có $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$
- Khối chóp lục giác đều cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b có $V = \frac{a^2\sqrt{3(b^2 - a^2)}}{2}$

Ví dụ 12: Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a . Thể tích của khối chóp tương ứng tính theo a sẽ bằng

Lời giải

Gọi khối chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ như hình vẽ.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, suy ra $SO \perp (ABCD)$.

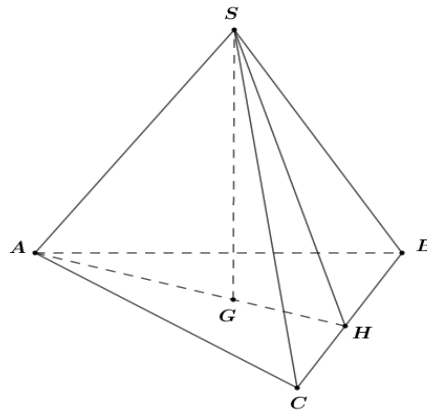
Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $BD = a\sqrt{2} \Rightarrow OD = OB = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{SABCD} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Ví dụ 13: Cho khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp đó bằng

Lời giải



Gọi H là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ABC . Ta có $SG \perp (ABC)$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

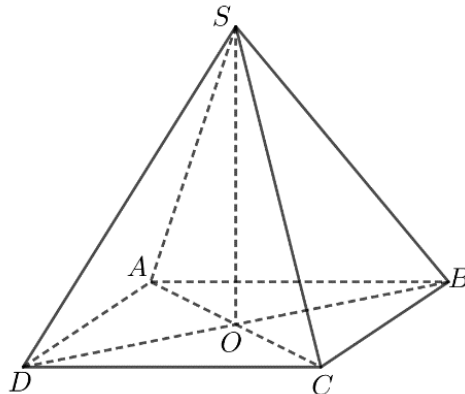
$(SA, (ABC)) = \angle SAG = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông SGA , ta có $SG = AG \cdot \tan \angle SAG = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SG \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Ví dụ 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng $\sqrt{3}a$ và độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{5}a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

Lời giải



Ta có: $BO = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{2}a$.

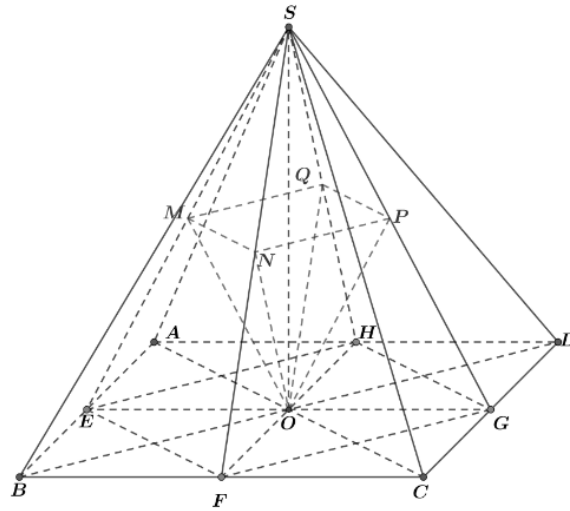
$$BD = 2BO = 2\sqrt{2}a \Rightarrow AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = 2a.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} (2a)^2 \cdot \sqrt{3}a = \frac{4\sqrt{3}}{3} a^3.$$

Ví dụ 15: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $\frac{3\sqrt{3}a}{2}$ và O là tâm của đáy.

Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB) , (SBC) , (SCD) và (SDA) . Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

Lời giải



Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp OE \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOE) \Rightarrow (SAB) \perp (SOE).$$

Mặt khác: $(SAB) \cap (SOE) = SE$ đồng thời M là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (SAB) nên $OM \perp SE$ tại M .

$$\text{Ta có: } SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2} = OE.$$

Khi đó tam giác SOE vuông cân tại $O \Rightarrow M$ là trung điểm SE .

Chứng minh tương tự ta cũng có N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SF, SG, SH .

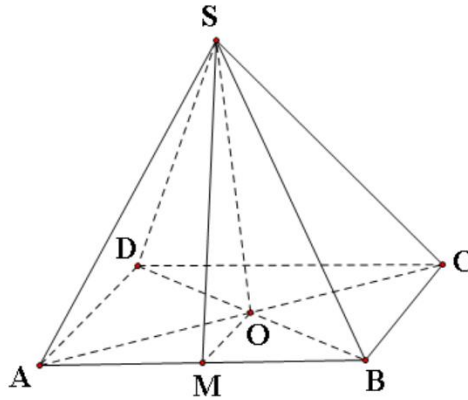
$$\text{Khi đó } d(O, (MNPQ)) = d(S, (MNPQ)) = \frac{1}{2} SO = \frac{3a}{4}, S_{MNPQ} = \frac{1}{4} S_{EFGH} = \frac{1}{8} S_{ABCD} = \frac{9a^2}{8}.$$

$$\text{Suy ra } V_{O.MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNPQ} \cdot d(O, (MNPQ)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{9a^2}{8} = \frac{9a^3}{32}.$$

$$\text{Vậy } V_{O.MNPQ} = \frac{9a^3}{32}.$$

Ví dụ 16: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có diện tích xung quanh gấp 2 lần diện tích đáy, diện tích đáy bằng $4a^2$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ tương ứng bằng

Lời giải



Diện tích hình vuông $ABCD$: $S_{ABCD} = AB^2 = 4a^2 \Rightarrow AB = 2a$.

Gọi M là trung điểm cạnh AB .

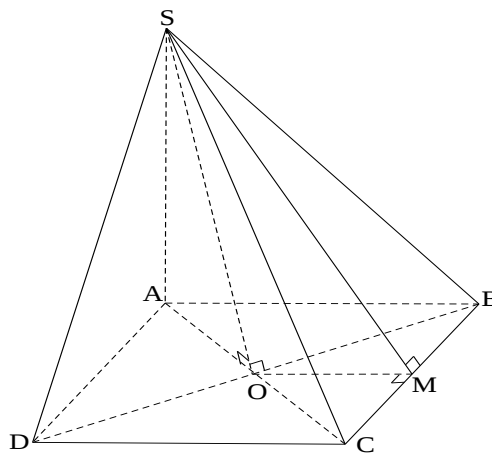
Diện tích xung quanh của khối chóp $S.ABCD$: $4.S_{\triangle SAB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot SM \cdot AB = 8a^2 \Rightarrow SM = 2a$.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình vuông $ABCD$, trong tam giác vuông SOM có $SO^2 = SM^2 - OM^2 = 3a^2 \Rightarrow SO = a\sqrt{3}$.

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3} \cdot 4a^2 = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Ví dụ 17: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

Lời giải



$ABCD$ là hình vuông có tâm O và cạnh bằng x .

Gọi M là trung điểm của BC . Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là góc SMO bằng 60° .

$$\text{Ta có } SM^2 = 4a^2 - \frac{x^2}{4}, SO^2 = 4a^2 - \frac{x^2}{2}.$$

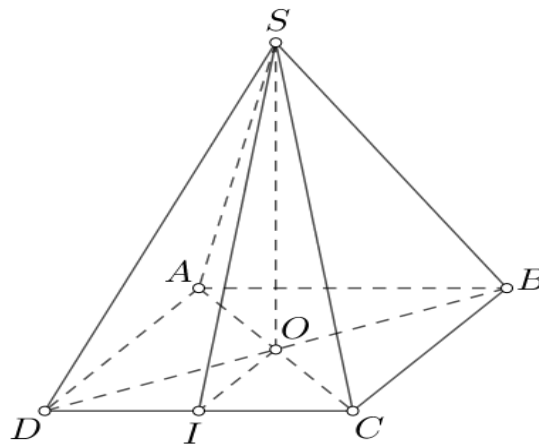
$$\text{Và } \cos SMO = \frac{OM}{SM} \Leftrightarrow \cos 60^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{\frac{x^2}{4}}{4a^2 - \frac{x^2}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{4a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Suy ra } SO = \sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot AB^2 = \frac{32\sqrt{3}a^3}{15\sqrt{5}}.$$

Ví dụ 18: Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và diện tích xung quanh bằng $8a^2$. Thể tích của khối chóp đó bằng

✍ **Lời giải**



Xét hình chóp $S.ABCD$ thỏa các giả thiết. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và I là trung điểm CD . Ta có $S_{SCD} = \frac{1}{2} SI \cdot CD \Rightarrow 2a^2 = \frac{1}{2} \cdot SI \cdot 2a \Rightarrow SI = 2a$.

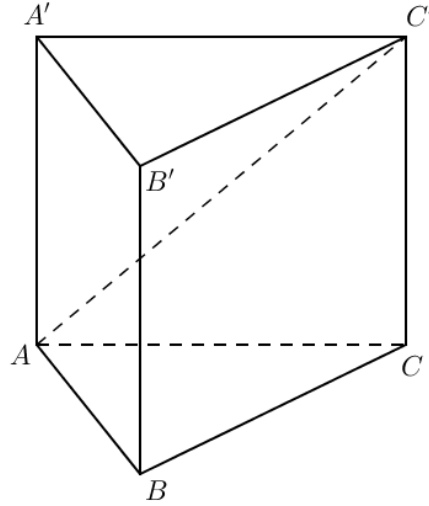
Dễ thấy $OI = a$ và tam giác SOI vuông tại O . Suy ra $SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = a\sqrt{3}$.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot 4a^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} a^3.$$

Dạng 4: Thể tích khối lăng trụ đứng

Ví dụ 19: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . Biết $C'A = a\sqrt{2}$ và $\angle AC'C = 45^\circ$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

☞ **Lời giải**



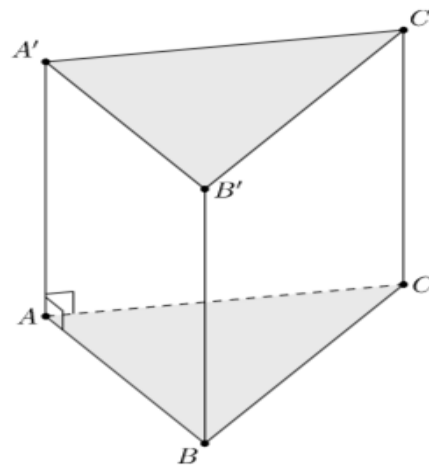
Trong $\triangle ACC'$ có $AC = AC' \cdot \sin \angle AC'C = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a$; $CC' = AC' \cdot \cos \angle AC'C = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a$.

Trong $\triangle BAC$ có $AC^2 = BA^2 + BC^2 \Leftrightarrow AC^2 = 2BA^2 \Rightarrow BA = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = CC' \cdot S_{\triangle ABC} = CC' \cdot \frac{1}{2} \cdot BA^2 = a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{4}$.

Ví dụ 20: Cho khối lăng trụ tam giác đều, cạnh bên có độ dài gấp hai lần cạnh đáy. Biết tổng diện tích các mặt của khối lăng trụ là $(12 + \sqrt{3})a^2$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho

☞ **Lời giải**



Đặt độ dài một cạnh của tam giác đều ABC là x . Do độ dài của cạnh bên của hình lăng trụ gấp hai lần cạnh đáy nên hình chữ nhật $ABB'A'$ có $AB = x$; $AA' = 2x$. Diện tích xung quanh của

khối lăng trụ là $S_1 = 3.x.2x = 6x^2$

Diện tích hai đáy của khối lăng trụ là $S_2 = 2.\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

Tổng diện tích các mặt của trụ tam giác đều là

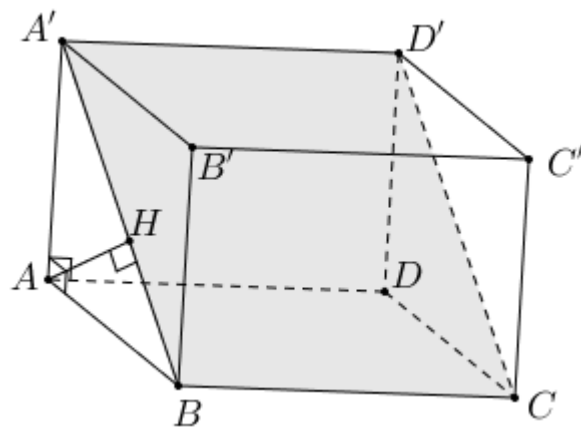
$$S = S_1 + S_2 = 6x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{(12 + \sqrt{3})}{2}x^2 = (12 + \sqrt{3})a^2 \quad . \text{ Suy ra } x = \sqrt{2}.a$$

Diện tích một đáy của khối lăng trụ là $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (a\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

Thể tích khối lăng trụ $V = AA'.S_{ABC} = 2.a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \sqrt{6}a^3$

Ví dụ 21: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $A'BCD'$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích hình hộp theo a .

Lời giải



Ta có: $\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp BB' \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow (A'BCD') \perp (AA'B'B).$

Gọi H là hình chiếu của A trên $A'B$, suy ra $\left. \begin{array}{l} AH \perp BC \\ AH \perp A'B \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (A'BCD').$

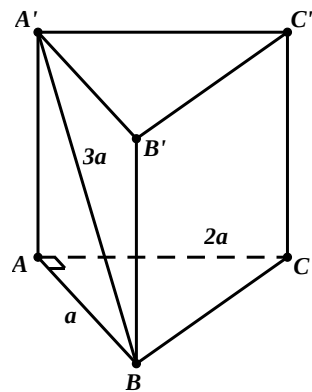
Như vậy AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BCD') \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác $AA'B$, ta có $\frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{4}{3a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{3a^2}$ do vậy $AA' = a\sqrt{3}$

Khi đó thể tích hình hộp là: $V = S_{ABCD}.AA' = a^2.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}.$

Ví dụ 22: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông tại A , biết $AB = a$, $AC = 2a$ và $A'B = 3a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



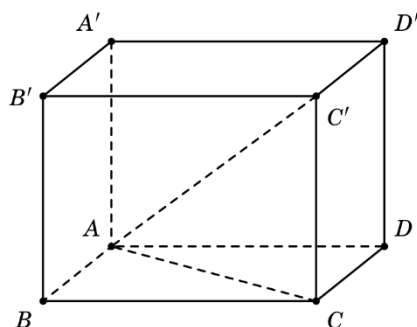
Diện tích đáy là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2}.a.2a = a^2$.

Tam giác ABA' vuông tại A nên có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$.

Thể tích cần tính là $V = S_{\triangle ABC}.AA' = a^2.2a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}a^3$.

Ví dụ 23: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AC' = \sqrt{6}a$. Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

Lời giải



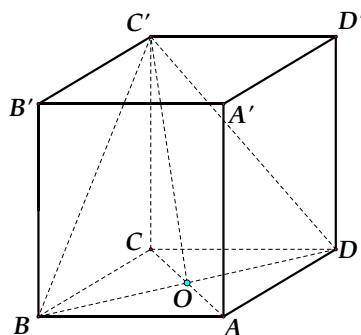
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{6})^2 - (a\sqrt{5})^2} = a$$

Diện tích mặt đáy là $S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2$.

Suy ra $V_{ABCD.A'B'C'D'} = CC'.S_{ABCD} = a.2a^2 = 2a^3$.

Ví dụ 24: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $AC = 2\sqrt{2}a$, góc giữa hai mặt phẳng $(C'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 45° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng:

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Dễ thấy $AC \perp BD$ tại O và $BD \perp CC'$

Suy ra $BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp OC'$.

Suy ra $[(C'BD), (ABCD)] = (OC', OC) = 45^\circ \Rightarrow CC' = OC = \frac{AC}{2} = a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = CC' \cdot \left(\frac{AC}{\sqrt{2}}\right)^2 = a\sqrt{2} \cdot 4a^2 = 4\sqrt{2}a^3$.

Ví dụ 25: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30° . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

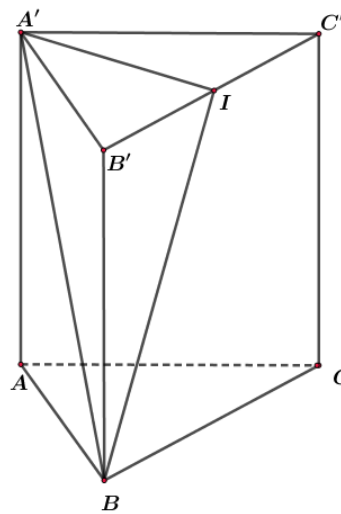
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$.

B. $\frac{3}{4}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{12}a^3$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{4}a^3$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $B'C' \Rightarrow A'I \perp B'C'$.

Khi đó $\begin{cases} A'I \perp B'C' \\ A'I \perp BB' \end{cases} \Rightarrow A'I \perp (BB'C'C) \Rightarrow (A'B, (BB'C'C)) = (A'B, BI) = A'BI = 30^\circ$

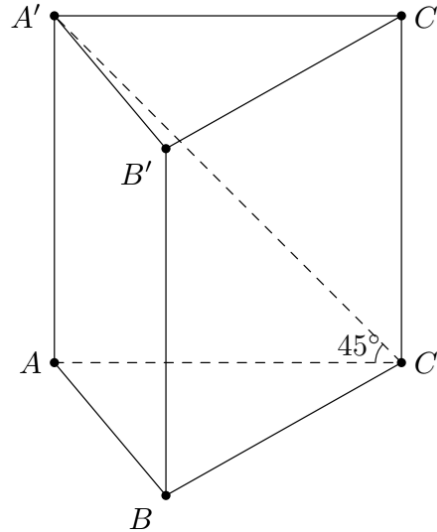
Đặt $h = BB'$. Ta có $\tan 30^\circ = \frac{A'I}{BI} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}} \Leftrightarrow h = a\sqrt{2}$

Suy ra thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Dạng 5: Thể tích khối lăng trụ đều

Ví dụ 26: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải

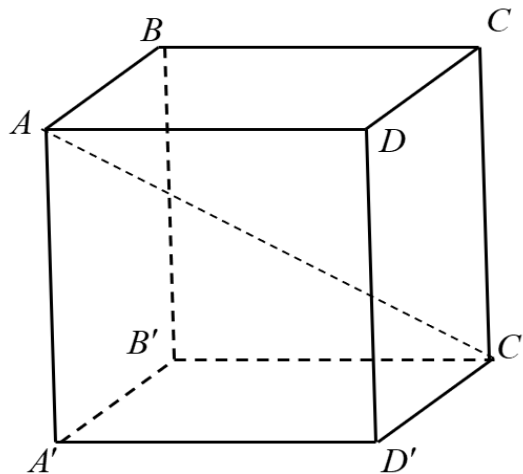


Ta có $(A'C, (ABC)) = A'CA = 45^\circ$ nên $\square AA'C$ vuông cân tại A suy ra $AA' = AC = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = Sh = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 27: Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$

Lời giải



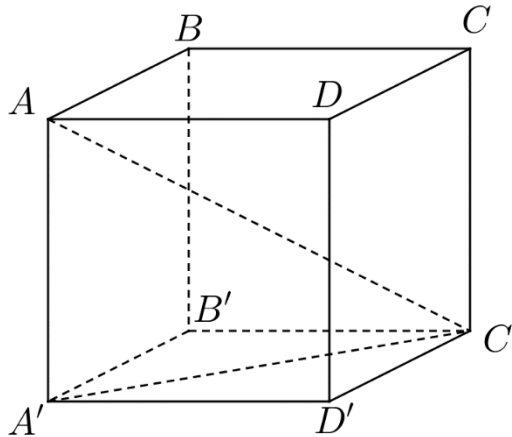
Gọi cạnh của hình lập phương là x , khi đó ta có:

$$AC'^2 = AA'^2 + A'C'^2 \Leftrightarrow AC'^2 = AA'^2 + AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow 3a^2 = x^2 + x^2 + x^2 \Leftrightarrow x = a.$$

Vậy thể tích của hình lập phương là $V = a^3$.

Ví dụ 28: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC' = 2a\sqrt{3}$. Tính thể tích hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Lời giải



Gọi cạnh hình lập phương có độ dài x .

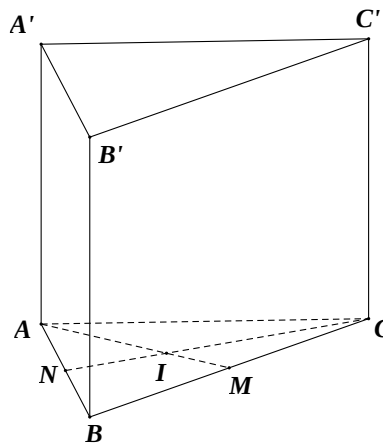
Xét tam giác $A'B'C'$ vuông tại B' có $A'C' = x\sqrt{2}$.

Xét tam giác $AA'C'$ vuông tại A' có $AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = x\sqrt{3}$ suy ra $x\sqrt{3} = 2a\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2a$

Vậy thể tích hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = 8a^3$.

Ví dụ 29: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $2a$. Đáy ABC nội tiếp đường tròn bán kính $R = a$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC , N là trung điểm của AB và $I = AM \cap CN$. Đặt $AB = x$.

Đáy ABC là tam giác đều và nội tiếp đường tròn bán kính $R = a$ nên $AI = a$, suy ra

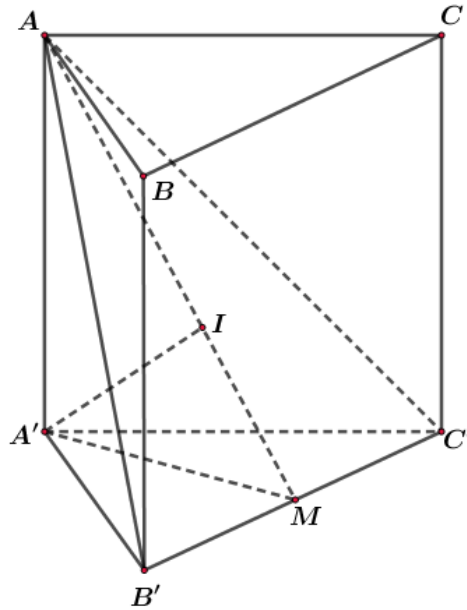
$$AM = \frac{3}{2}AI = \frac{3}{2}a.$$

$$\text{Khi đó, } AM^2 = AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow x^2 = 3a^2 \Rightarrow x = \sqrt{3}a.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{1}{2}AM \cdot BC \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}a \cdot \sqrt{3}a \cdot 2a = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^3.$$

Ví dụ 30: Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$. Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng a . Thể tích khối lăng trụ đã cho là

Lời giải



Gọi M là trung điểm của $B'C'$ và I là hình chiếu của A' lên AM . Khi đó ta có

$$\begin{cases} B'C' \perp A'M \\ B'C' \perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (A'MA) \Rightarrow B'C' \perp A'I \quad (1)$$

$$\text{Mà } AM \perp A'I \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } A'I \perp (AB'C') \Rightarrow d(A', (AB'C')) = A'I = a.$$

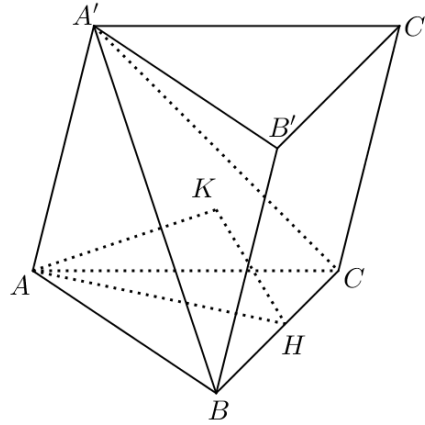
$$\text{Xét tam giác vuông } AA'M : \frac{1}{A'I^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{A'M^2} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Thể tích khối lăng trụ đã cho là } V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{4a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{2}a^3}{2}.$$

Dạng 5: Thể tích khối lăng trụ xiên

Ví dụ 31: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác $A'BC$ bằng 4, khoảng cách từ A đến BC bằng 3, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'B'C')$ bằng 30° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



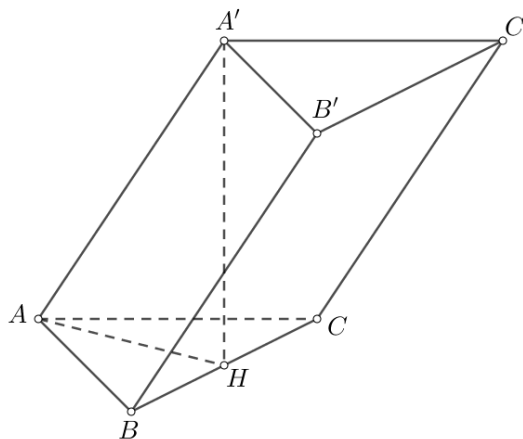
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BC và $(A'BC)$.

Khi đó $((A'BC), (A'B'C')) = ((A'BC), (ABC)) = AHK = 30^\circ \Rightarrow AK = AH \cdot \sin 30^\circ = \frac{3}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A'.ABC} = 3V_{A.A'BC} = AK \cdot S_{\Delta A'BC} = 6$.

Ví dụ 32: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu của A' xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải



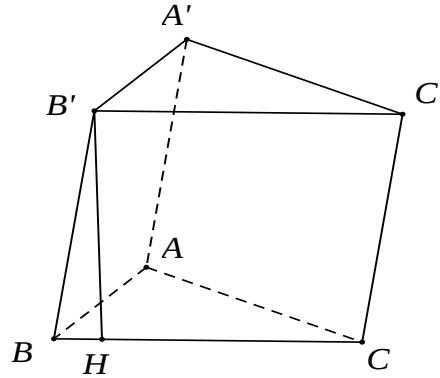
Gọi H là trung điểm BC .

Khi đó $(AA', (ABC)) = (AA', BH) = A'AH = 30^\circ$.

Suy ra $A'H = AH \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$. Vậy $V = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Ví dụ 33: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với đáy và $B'BC = 30^\circ$. Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ bằng

Lời giải



Ta có $(BCC'B') \perp (ABC)$ (theo giả thiết).

Hạ $B'H \perp BC \Rightarrow B'H \perp (ABC)$ và $B'BH = B'BC = 30^\circ$.

Suy ra chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $h = B'H = BB' \cdot \sin 30^\circ = 2a$.

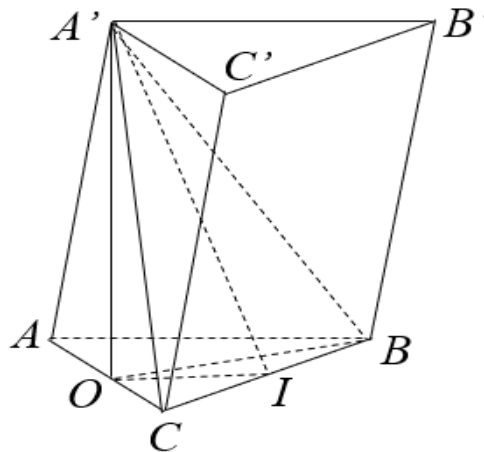
Do đáy là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow$ Diện tích đáy là $S_{\text{đáy}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{LT} = S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là $V = \frac{1}{3}V_{LT} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Ví dụ 34: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $A'A = A'B = A'C$. Biết rằng $AB = a$ và $BC = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



Gọi O, I lần lượt là trung điểm của đoạn AC, BC .

Nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $OI \perp BC$.

Do $A'A = A'B = A'C$ nên $A'O \perp (ABC)$.

$$\text{Ta có: } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}; \quad OI = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$$

$$A'O \perp BC, OI \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'OI) \Rightarrow BC \perp A'I.$$

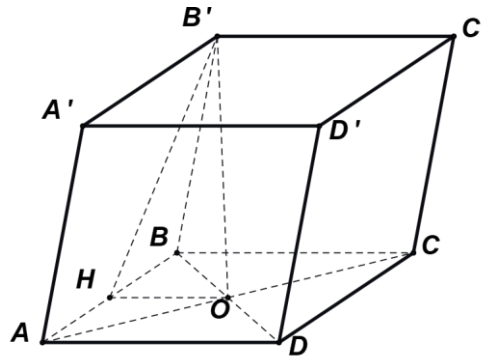
$$\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ A'I \subset (A'BC), A'I \perp BC \Rightarrow ((\bar{A}BC), (ABC)) = (\bar{A}I, OI) = A'IO = 60^\circ. \\ OI \subset (ABC), OI \perp BC \end{cases}$$

$$\text{Tam giác } A'IO \text{ vuông tại } O \text{ nên } \tan A'IO = \frac{A'O}{OI} \Rightarrow A'O = OI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = A'O \cdot S_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{4}.$$

Ví dụ 35: Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hình chiếu của B' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD , biết góc giữa hai mặt phẳng (ABA') và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD . Kẻ $OH \perp AB$.

Theo giả thiết suy ra $B'HO = 60^\circ$.

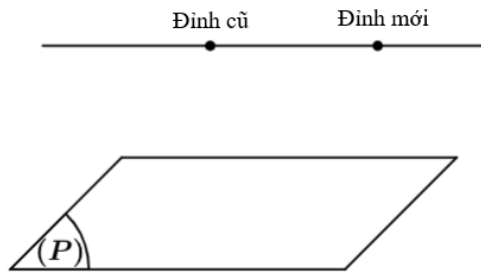
$$\text{Ta có } B'O = OH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Thể tích khối lăng trụ } V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

Chú thích: V_1 = Thể tích cũ; V_2 = Thể tích mới (*Dùng cho kỹ thuật chuyển đỉnh và đáy*)

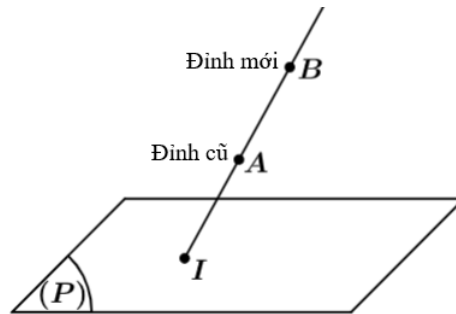
1. Kỹ thuật đổi đỉnh (Đáy không đổi)

a) Song song với đáy:



Khi đó: $V_1 = V_2 = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$

b) Cắt đáy:



Khi đó: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d(A; (P)) \cdot S_d}{\frac{1}{3} \cdot d(B; (P)) \cdot S_d} = \frac{IB}{IA}$

2. Kỹ thuật chuyển đáy (Đường cao không đổi)

Ta có: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}$ với S_1 là diện tích đáy cũ; S_2 là diện tích đáy mới.

Chú ý:

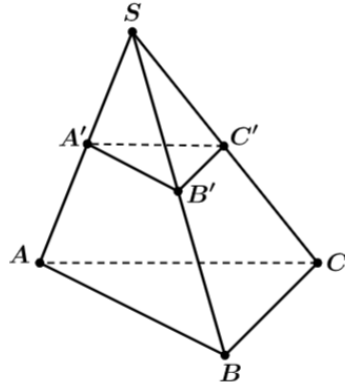
- Đưa hai khối đa diện về cùng một đỉnh; hai đáy mới và cũ nằm trong cùng một mặt phẳng (thường thì đáy cũ chứa đáy mới). Áp dụng công thức tính diện tích của đa giác để so sánh tỉ số giữa đáy cũ và đáy mới.
- Nếu tăng (hoặc giảm) mỗi cạnh của đa giác (tam giác, tứ giác) k lần thì diện tích đa giác sẽ tăng (hoặc giảm) k^2 lần.

3. Một số kết quả quan trọng

Kết quả 1: Cho tam giác OAB . Gọi A' , B' lần lượt nằm trên các cạnh OA và OB . Khi đó:

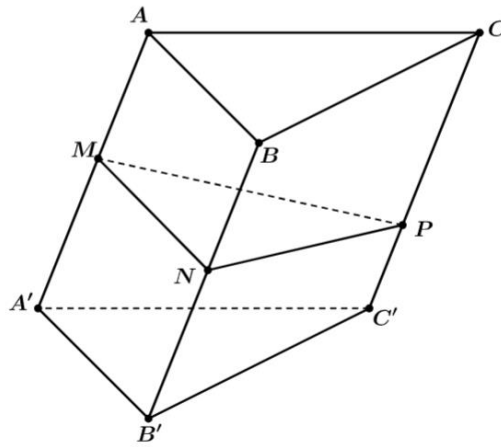
$$\frac{S_{\triangle OA'B'}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{OA'}{OA} \cdot \frac{OB'}{OB}$$

Kết quả 2: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi A' , B' , C' lần lượt nằm trên các cạnh SA , SB và SC .



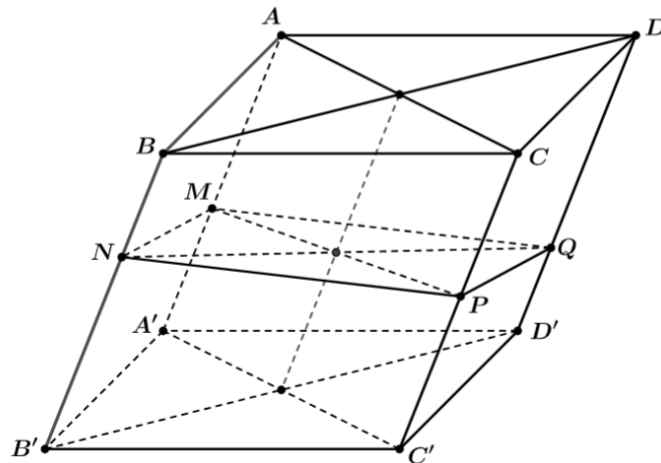
Khi đó:
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Kết quả 3: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Trên các cạnh bên AA' , BB' và CC' lần lượt lấy các điểm M, N, P



Giả sử: $\frac{A'M}{A'A} = x; \frac{B'N}{B'B} = y; \frac{C'P}{C'C} = z$ thì khi đó
$$\frac{V_{A'B'C'.MNP}}{V_{ABC.MNP}} = \frac{x + y + z}{3}$$

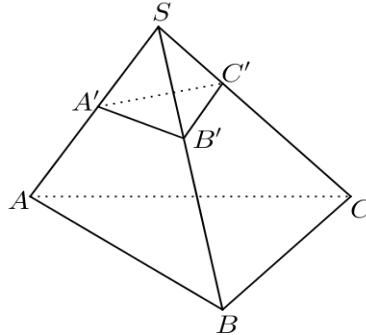
Kết quả 4: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh bên AA' , BB' , CC' và DD' lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho M, N, P, Q đồng phẳng.



Giả sử: $\frac{A'M}{A'A} = x; \frac{B'N}{B'B} = y; \frac{C'P}{C'C} = z; \frac{D'Q}{D'D} = t$ thì khi đó $x + z = y + t$ và
$$\frac{V_{A'B'C'D'.MNPQ}}{V_{ABCD.MNPQ}} = \frac{x + y + z + t}{4}$$

Ví dụ 36: Cho khối chóp $S.ABC$. Trên ba cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho $SA = 2SA', SB = 3SB', SC = 4SC'$. Mặt phẳng $(A'B'C')$ chia khối chóp thành hai khối. Gọi V và V' lần lượt là thể tích các khối đa diện $S.A'B'C'$ và $ABC.A'B'C'$. Khi đó tỉ số $\frac{V}{V'}$ là:

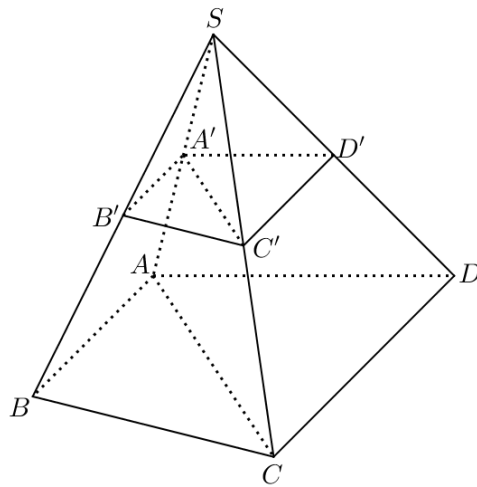
Lời giải



$$\text{Ta có } \frac{V}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{V}{V'} = \frac{1}{23}.$$

Ví dụ 37: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$.

Lời giải

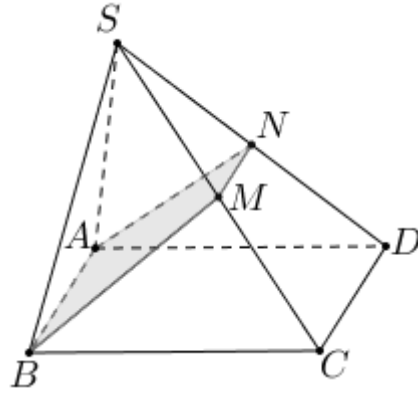


$$\text{Ta có } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{8}; \frac{V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Khi đó } V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'} = \frac{1}{8}(V_{S.ABC} + V_{S.ACD}) = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}$$

Ví dụ 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của SC . Mặt phẳng (α) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Lời giải



Gọi $N = (\alpha) \cap SD \Rightarrow MN \parallel CD$, suy ra N là trung điểm của SD .

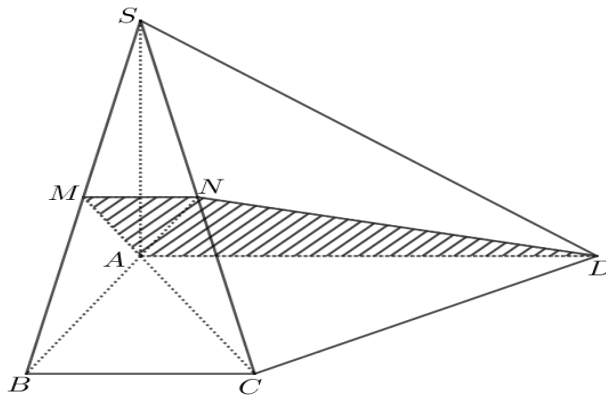
$$\text{Ta có } a = \frac{SA}{SA} = 1, b = \frac{SB}{SB} = 1, c = \frac{SC}{SM} = 2, d = \frac{SD}{SN} = 2.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} = \frac{1+1+2+2}{4.1.1.2.2} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{V_{ABCDMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{5}{8}$$

$$\text{Vậy } V_1 = V_{S.ABMN}, V_2 = V_{ABCDMN} \text{ và } \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$$

Ví dụ 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B . $AB = BC = 2a$, $AD = 4a$. Mặt phẳng (α) đi qua A và trung điểm các cạnh SB , SC chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V là thể tích khối đa diện chứa đỉnh S , V' là thể tích khối đa diện không chứa đỉnh S . Tỉ số $\frac{V}{V'}$ bằng

Lời giải



Ta có: MN là đường trung bình của tam giác $SBC \Rightarrow MN \parallel BC \parallel AD$.

Mặt phẳng (α) đi qua A và chứa $MN \parallel BC$ nên $(\alpha) \cap (ABCD) = AD$.

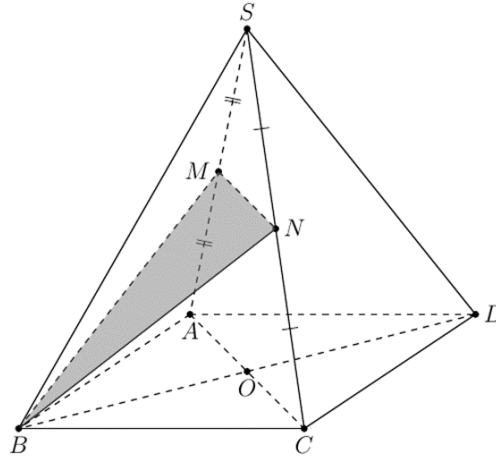
Do đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) là hình thang $AMND$.

$$\text{Ta có: } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD} = \frac{BC}{AD} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \\ S_{\triangle ACD} = \frac{2}{3} S_{ABCD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{S.ABC} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD} \\ V_{S.ACD} = \frac{2}{3} V_{S.ABCD} \end{cases}.$$

$$V = V_{S.AMN} + V_{S.AND} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot V_{S.ABC} + \frac{SN}{SC} \cdot V_{S.ACD} = \frac{1}{4} V_{S.ABC} + \frac{1}{2} V_{S.ACD} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} V_{S.ABCD} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} V_{S.ABCD} \right)$$

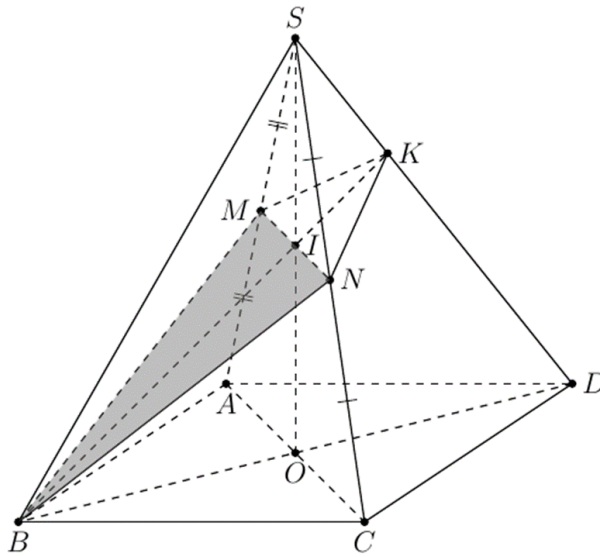
$$= \frac{5}{12} V_{S.ABCD} \Rightarrow V' = V_{S.ABCD} - V = \frac{7}{12} V_{S.ABCD}. \text{ Do đó, } \frac{V}{V'} = \frac{5}{7}.$$

Ví dụ 40: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy $AB = a$, cạnh bên $SA = 2a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm SA, SC . Mặt phẳng (BMN) cắt SD tại K .



Thể tích khối chóp $S.MNK$ bằng

Lời giải



Gọi $I = MN \cap SO$, suy ra I là trung điểm SO .

Gọi $K = BI \cap SD$, suy ra $K = (BMN) \cap SD$

Áp dụng định lí Menelaus trong tam giác SOD , cắt tuyến BIK .

$$\frac{BO}{BD} \cdot \frac{IS}{IO} \cdot \frac{KD}{KS} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{KD}{KS} = 1 \Rightarrow \frac{KD}{KS} = 2.$$

$$AB = a \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

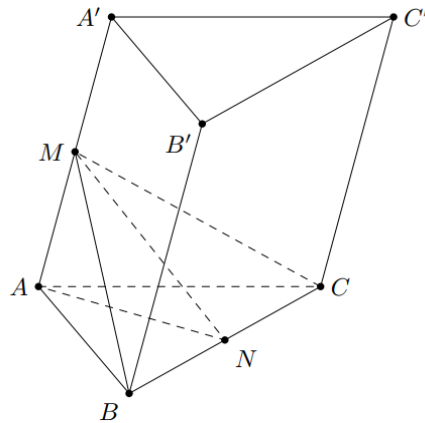
$$V_{S.ACD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{14}}{12}.$$

$$\frac{V_{S.MNK}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SK}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.MNK} = \frac{1}{12} V_{S.ACD} = \frac{1}{12} \cdot \frac{a^3\sqrt{14}}{12} = \frac{a^3\sqrt{14}}{144}.$$

Ví dụ 41: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi M , N lần lượt là trung điểm của cạnh AA' và BC . Biết khối tứ diện $AMNB$ có thể tích là $3a^3$. Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải

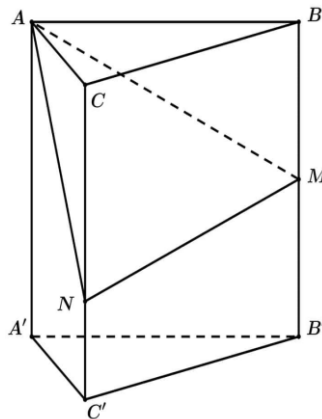


Gọi V là thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$

$$\text{Ta có } V_{M.ABN} = \frac{1}{2} V_{M.ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V_{A'.ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} V = \frac{1}{12} V \text{ nên } V = 12V_{AMNB} = 36a^3.$$

Ví dụ 42: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M là trung điểm cạnh BB' , điểm N thuộc cạnh CC' sao cho $CN = 2C'N$. Khối chóp $A.BCNM$ có thể tích là V_1 . Tính $\frac{V_1}{V}$.

Lời giải



Diện tích hình thang $BCNM$:

$$S_{BCNM} = \frac{1}{2} (BM + CN) \cdot d(B; CC') = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} CC' + \frac{2}{3} CC' \right) \cdot d(B; CC') = \frac{7}{12} \cdot CC' \cdot d(B; CC')$$

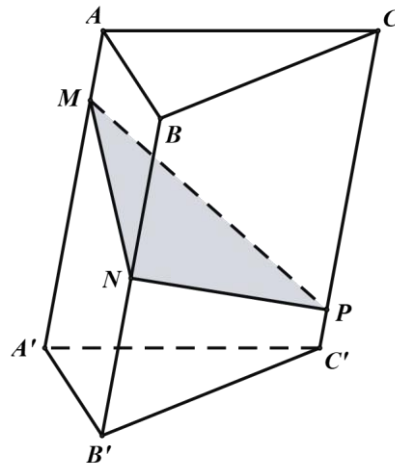
$$= \frac{7}{12} S_{BCC'B'}$$

$$\text{Khi đó: } V_1 = \frac{7}{12} V_{A.BCC'B'} = \frac{7}{12} (V - V_{A.A'B'C'}) = \frac{7}{12} \left(V - \frac{1}{3} \cdot d(A; (A'B'C')) \cdot S_{A'B'C'} \right) \setminus$$

$$= \frac{7}{12} \left(V - \frac{1}{3} V \right) = \frac{7V}{18}. \text{ Suy ra } \frac{V_1}{V} = \frac{7}{18}$$

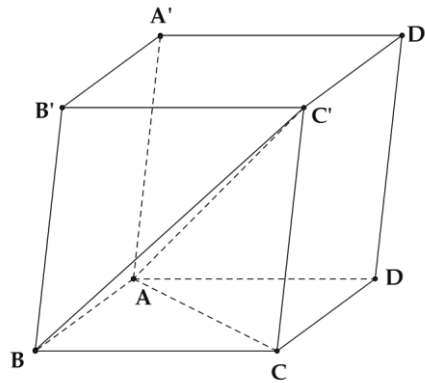
Cách 2: Áp dụng công thức

$$\text{Nếu } \frac{AM}{AA'} = a; \frac{BN}{BB'} = b; \frac{CP}{CC'} = c \text{ thì } \boxed{\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3}(a+b+c)}$$



$$\text{Khi đó: } \frac{V_1}{V} = \frac{1}{3} \left(\frac{CN}{CC'} + \frac{BM}{BB'} + \frac{AA'}{AA'} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{7}{18}.$$

Ví dụ 43: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1. Thể tích của khối tứ diện $ABC'C$ bằng



Lời giải

$$\text{Ta có } V_{ABC'C} = \frac{1}{3} \cdot d(C', (ABC)) \cdot S_{ABC}$$

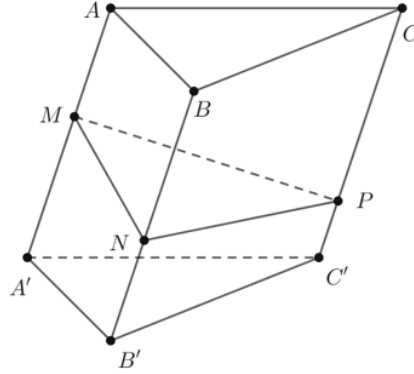
$$= \frac{1}{3} d(C', (ABC)) \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{6} d(C', (ABC)) \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{6}.$$

Ví dụ 44: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . M, N, P là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh

AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{3}, \frac{BN}{BB'} = x, \frac{CP}{CC'} = y$. Biết thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ bằng

$\frac{2V}{3}$. Giá trị lớn nhất của xy bằng:

Lời giải



$$\text{Ta có } V_{ABC.MNP} = V_{M.ABC} + V_{M.NBCP} = \frac{1}{3}d(M, (ABC))S_{ABC} + \frac{1}{3}d(M, (NBCP))S_{NBCP}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{AM}{AA'} d(A', (ABC))S_{ABC} + \frac{1}{3} \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right) d(A, (NBCP))S_{BB'C'C}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{AM}{AA'} V_{ABC.A'B'C'} + \frac{1}{3} \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right) V_{ABC.A'B'C'} = \frac{\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'}}{3} V_{ABC.A'B'C'}$$

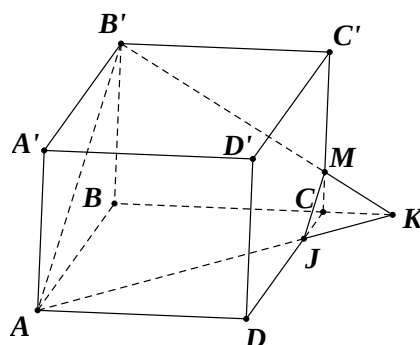
$$\text{Ta có } \frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'}}{3} = \frac{\frac{1}{3} + x + y}{3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x + y = \frac{5}{3} \Rightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{25}{36}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{5}{6}$

Ví dụ 45: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm thuộc đoạn CC' thỏa mãn $CC' = 4CM$. Mặt phẳng $(AB'M)$ chia khối lập phương thành hai phần có thể tích V_1 và V_2 . Gọi V_2 là phần

có chứa điểm B . Tính tỉ số $k = \frac{V_1}{V_2}$.

Lời giải



Gọi $K = MB' \cap BC$; $J = AK \cap CD$ và V là thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

$$\text{Ta có } \frac{CK}{B'C'} = \frac{CM}{MC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{KM}{KB'} = \frac{KJ}{KA} = \frac{KC}{KB} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ta có } V_2 = V_{B'.ABK} - V_{K.CMJ}; \quad \frac{V_{K.CMJ}}{V_{K.BB'A}} = \frac{KC}{KB} \cdot \frac{KM}{KB'} \cdot \frac{KJ}{KA} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}.$$

$$\text{Suy ra } V_2 = \frac{63}{64} V_{B'.ABK}.$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABK} = \frac{1}{2} d(A, BK).BK = \frac{1}{2} d(A, BK). \frac{4}{3} BC = \frac{2}{3} S_{ABCD} \Rightarrow V_{B'.ABK} = \frac{2}{9} V.$$

$$\text{Suy ra } V_2 = \frac{7}{32} V \Rightarrow V_1 = \frac{25}{32} V \Rightarrow k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{7}.$$

C**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN**

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{3}{4}a^3$.

B. $V = a^3$.

C. $V = 2a^3\sqrt{2}$.

D. $V = \frac{1}{2}a^3$.

Lời giải

Chọn B

$$V = \frac{1}{3}hS = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (2a)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = a^3.$$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a, SA$ vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

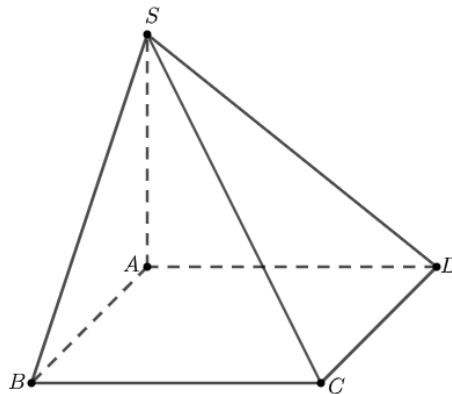
B. $4\sqrt{3}a^3$.

C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

D. $2\sqrt{3}a^3$.

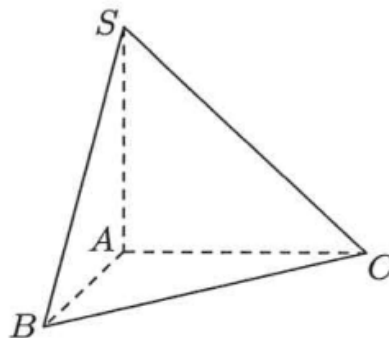
Lời giải

Chọn C



$$\text{Thể tích khối chóp: } V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot a \cdot 2a = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2$; SA vuông góc với đáy và $SA = 3$ (tham khảo hình vẽ).



Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. 12.

B. 2.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

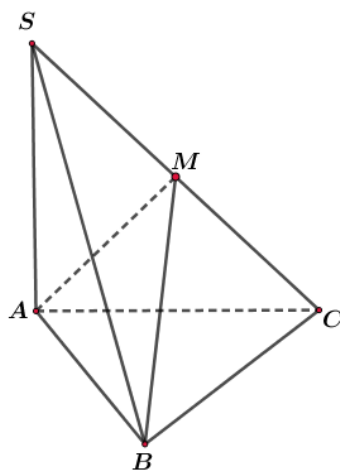
Thể tích khối chóp đã cho $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.AC.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.2.2.3 = 2.$

A. $\frac{8\sqrt{6} a^3}{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{6} a^3}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{6} a^3}{15}$. **D.** $4\sqrt{6} a^3$.

$$V_{S,ABCD} = \frac{1}{3} S A S_{ABCD} = \frac{1}{3} 2\sqrt{6}a \cdot \frac{(4a+2a) \cdot 2a}{2} = 4\sqrt{6}a^3 \dots$$

A. $\frac{1}{2}a^3$. **B.** $\frac{1}{4}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$.

Chọn B



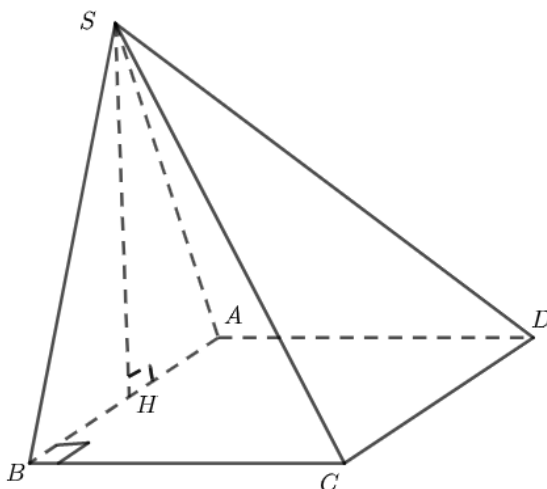
Vì M là trung điểm của SC nên

$$V_{S.AMB} = \frac{1}{2} V_{S.ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{12} \cdot a\sqrt{3} \cdot a \cdot \sqrt{4a^2 - a^2} = \frac{1}{4} a^3.$$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a\sqrt{3}$; $AD = 2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABD$ là

- A. $4\sqrt{3}a^3$.. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.. C. $4a^3$.. D. $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB suy ra SH là đường cao của tam giác SAB
 $\Rightarrow SH \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Vì tam giác SAB đều cạnh $2a\sqrt{3}$ nên $SH = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3a$.

Diện tích tam giác ABD : $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 2a = 2a^2\sqrt{3}$.

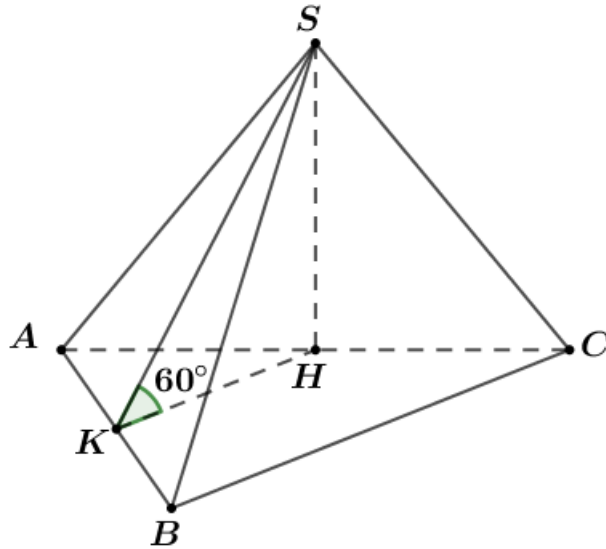
Thể tích khối chóp $S.ABD$: $V_{S.ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 2a^2\sqrt{3} \cdot 3a = 2\sqrt{3}a^3$..

- Câu 7:** Cho hình chóp $SABC$, đáy là tam giác ABC vuông tại B , có $AB = a\sqrt{3}; BC = a$. Tam giác SAC cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy, $mp(SBC)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $SABC$ là
- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $2a^3$.

Lời giải

Theo giả thiết, trong tam giác SAC kẻ đường cao $SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

$$\text{Khi đó } V_{SABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC}.$$



$$\text{Ta có } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Trong tam giác } ABC \text{ kẻ } HK \perp AB \Rightarrow SKH = 60^\circ; HK = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } SKH, \text{ ta có } SH = \tan 60^\circ \cdot HK = \sqrt{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}.$$

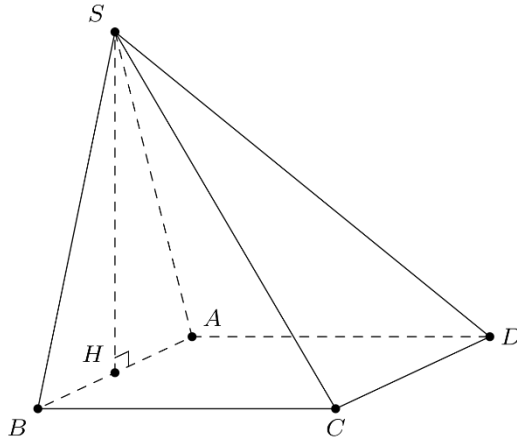
- Câu 8:** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, mặt bên (SAB) là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$?

- A. $\frac{9}{2}a^3$. B. $3\sqrt{3}a^3$. C. $\frac{27}{2}a^3$. D. $\frac{3}{2}a^3$.

Lời giải

Chọn A

Chọn D



Gọi H là trung điểm của AB suy ra $SH \perp AB$

Theo đề ta có $SH \perp (ABCD)$

Xét $\triangle SAB$ đều có đường cao SH suy ra $SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Vậy thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.(2a)^2 = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 10: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\angle ABC = 60^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, mặt bên (SCD) tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $2a^3\sqrt{3}$.

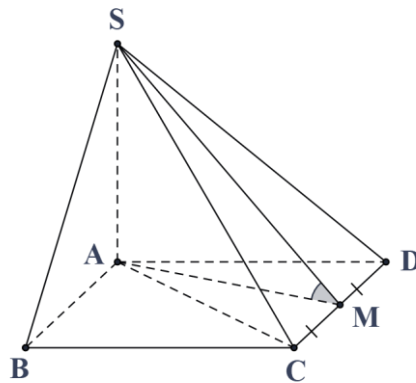
B. $3a^3\sqrt{3}$.

C. $a^3\sqrt{3}$.

D. $2a^3$.

Lời giải

Chọn A



Tam giác ABC cân (do $AB = AC$ bởi $ABCD$ là hình thoi) có $\angle ABC = 60^\circ$ nên nó đều.

Gọi M là trung điểm cạnh CD suy ra $AM \perp CD$;

Ta có $\begin{cases} CD \perp AM \\ CD \perp SA \end{cases}$ suy ra $CD \perp SM$ nên $((SCD), (ABCD)) = (SM, AM) = \angle SMA = 60^\circ$, với

$AM = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ ta có $SA = AM \cdot \tan 60^\circ = 3a$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}SA.2S_{ABC} = \frac{1}{3}.3a.2.(2a)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 11: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ biết $AB = a$ và $SA = 2a$. Tính chiều cao của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a\sqrt{33}}{9}$.

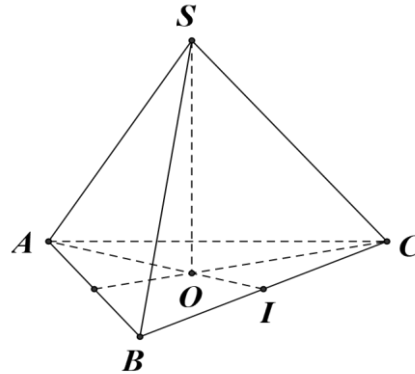
B. $V = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

C. $V = \frac{a\sqrt{141}}{6}$.

D. $V = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Do đáy là tam giác đều nên gọi I là trung điểm cạnh BC , khi đó AI là đường cao của tam giác đáy. Chiều cao của chóp là SO

Theo định lý Pitago ta có $AI = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, và $AO = \frac{2}{3}AI = \frac{2a\sqrt{3}}{3.2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SOA vuông tại O ta có $SO = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

Câu 12: Tính thể tích của khối tứ diện đều biết chiều cao tứ diện bằng a .

A. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^3$.

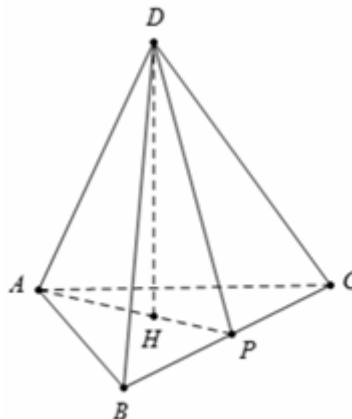
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}a^3$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Xét tứ diện đều $ABCD$ cạnh $AB = x$, P là trung điểm BC , đường cao $DH = a$

$AP = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{x\sqrt{3}}{3}$. Áp dụng định lí Pi-ta-go trong tam giác ADH ta có:

$$DH^2 + HA^2 = DA^2 \Rightarrow a^2 + \frac{x^2}{3} = x^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

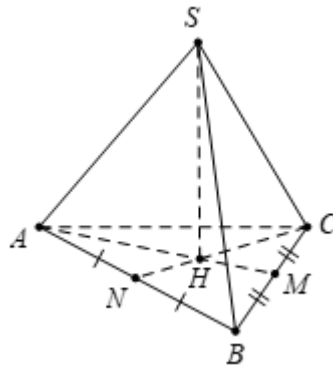
Do đó: $S_{\triangle ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$. Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot DH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 13: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB=2a$, cạnh bên $SA=a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

- A. $\sqrt{2}a^3$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. C. $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của BC

Ta có $AM = a\sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$

Mặt khác $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{(\sqrt{2}a)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$

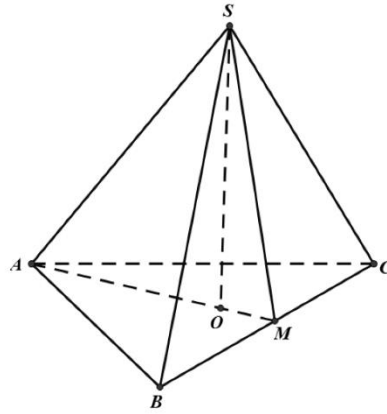
Vậy thể tích của khối chóp đã cho là: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot (2a)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}a}{3} = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 14: Cho khối chóp tam giác đều có cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{42}}{6}$ và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{42}}{9}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Góc giữa mặt bên và đáy bằng $60^\circ \Rightarrow \angle SMO = 60^\circ$

$$\text{Đặt } AB = x \Rightarrow \begin{cases} AO = \frac{x\sqrt{3}}{3} \\ OM = \frac{x\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

$$\text{Xét } \triangle SOM : SO = OM \cdot \tan 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{x}{2}$$

$$\text{Xét } \triangle SOA : AO^2 + SO^2 = SA^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{42}}{6}\right)^2 \Rightarrow x = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} SO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ S_{\triangle ABC} = \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

Câu 15: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng 60° và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng a . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a .

A. $V = \frac{2a^3}{9}$.

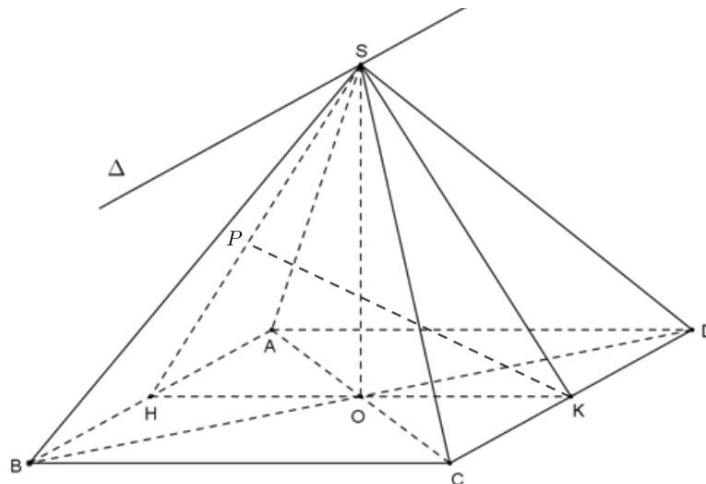
B. $V = \frac{4a^3}{9}$.

C. $a^3\sqrt{3}$.

D. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AB$.

Ta có: S là một điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

$AB \subset (SAB)$; $CD \subset (SCD)$; $AB // CD$.

Suy ra hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng Δ đi qua S , song song với AB và CD .

Gọi H ; K lần lượt là trung điểm của AB và $CD \Rightarrow HK$ đi qua O và $HK \perp AB$.

Ta có: $\begin{cases} SO \perp AB \\ HK \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHK) \Rightarrow \Delta \perp (SHK) \text{ (Do } \Delta // AB \text{)}.$

$\Rightarrow ((SAB); (SCD)) = (SH; SK) = 60^\circ \Rightarrow SH \perp SK \Rightarrow$ Tam giác SHK là tam giác đều.

Kẻ KP vuông góc SH tại P .

Do $CD // AB \subset (SAB) \Rightarrow CD // (SAB)$ nên $d(CD; AB) = d(CD; (SAB)) = d(K; (SAB)) = a$

Khi đó ta có: $\begin{cases} KP \perp SH \\ KP \perp AB \end{cases} \Rightarrow KP \perp (SAB) \Rightarrow d(K; (SAB)) = KP = a \Rightarrow SO = a$ và $HK = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ (Do tam giác SHK là tam giác đều)

Suy ra $S_{ABCD} = HK^2 = \frac{4a^2}{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a \cdot \frac{4a^2}{3} = \frac{4}{9} a^3$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có AB , AC , AA' đôi một vuông góc với nhau. Biết $AB = a$, $AC = 2a$, $AA' = 3a$, tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = a^3$.

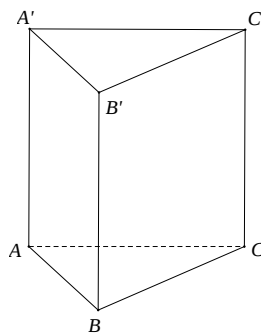
B. $V = 3a^3$.

C. $V = 6a^3$.

D. $V = 2a^3$.

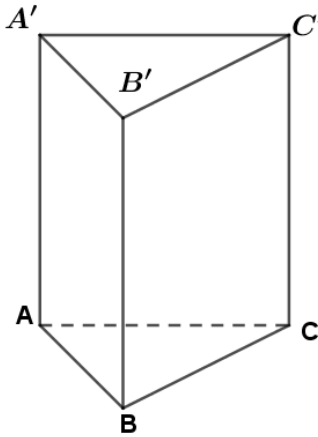
Lời giải

Chọn B



$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot AA' = 3a^3.$$

Câu 17: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a, AA' = a\sqrt{2}, BAC = 45^\circ$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho



A. $\frac{a^3}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$.

C. $\frac{a^3}{2}$.

D. $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối lăng trụ $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin BAC \cdot AA' = \frac{a^3}{2}$.

Câu 18: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là

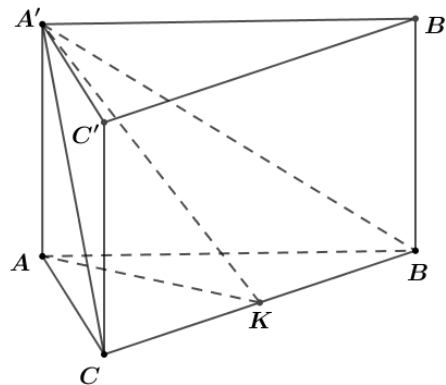
A. $\frac{2a^2\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Do đáy ABC đều nên các cạnh $A'B = A'C$. Kẻ $A'K \perp BC \Rightarrow \angle AKA' = 60^\circ$ và $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Xét $\triangle A'AK$: $AA' = \tan 60^\circ \cdot AK = \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$.

Khi đó $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 19: Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng $(A'BD)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho là:

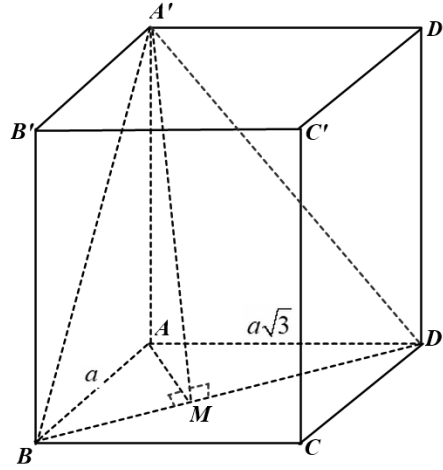
A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{3a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Trong $(ABCD)$ gọi M là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh BD

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AA' \\ BD \perp AM \end{cases} \Rightarrow BD \perp (A'M) \Rightarrow BD \perp A'M$$

$$\text{Do đó } ((A'BD); (ABCD)) = (A'M; AM) = A'MA = 60^\circ$$

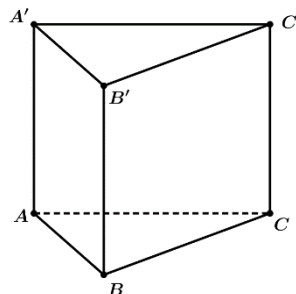
$$\text{Ta có } AM = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Xét tam giác $A'MA$ vuông tại A :

$$\tan A'MA = \tan 60^\circ = \frac{AA'}{AM} \Rightarrow AA' = AM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot S_{ABCD} = \frac{3a}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 20: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AC = AA' = 2$ (tham khảo hình vẽ)



Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

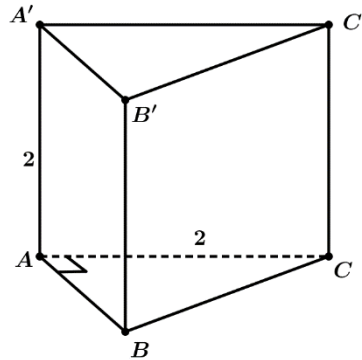
A. 2.

B. $\frac{2}{3}$.C. $\frac{4}{3}$.

D. 4.

Lời giải

Chọn D



Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.

Thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = 2 \cdot 2 = 4$.

Câu 21: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích tam giác ACD' bằng $a^2\sqrt{3}$. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

A. $8a^3$.B. a^3 .C. $2\sqrt{2}a^3$.D. $4\sqrt{2}a^3$.

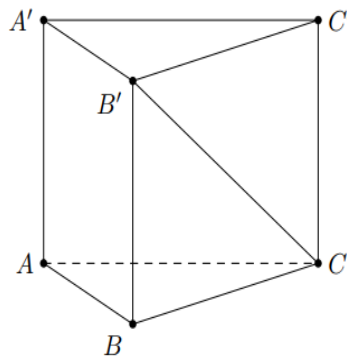
Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } AB = x \Rightarrow \begin{cases} AC = x\sqrt{2} \\ AD' = x\sqrt{2} \\ CD' = x\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle ACD'} = \frac{(x\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(x\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} \Rightarrow x = a\sqrt{2} \Rightarrow V_{LP} = (a\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}a^3.$$

Câu 22: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và góc giữa đường thẳng CB' và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2a^3\sqrt{3}$.B. $a^3\sqrt{3}$.C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có góc giữa đường thẳng CB' và mặt phẳng (ABC) chính là góc giữa đường thẳng CB' và đường thẳng CB hay chính là góc $B'CB$ mà theo giả thiết góc này bằng 45° nên $\Delta B'BC$ vuông cân tại B suy ra $B'B = BC = 2a$.

Thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V = (2a)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC = 2a$. Tính thể tích V của hình lập phương.

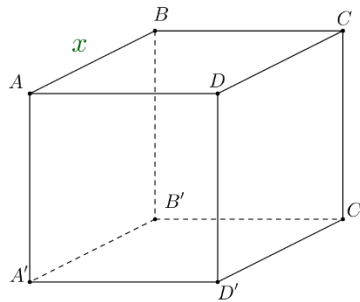
A. $V = 8a^3$.

B. $V = a^3$.

C. $4\sqrt{2}a^3$.

D. $2\sqrt{2}a^3$.

Lời giải



Gọi x là độ dài cạnh hình lập phương

Ta có: $2x^2 = (2a)^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$.

Do đó thể tích khối lập phương là: $V = (a\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}a^3$.

Câu 24: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $AA' = a\sqrt{2}$. Thể tích V của khối lăng trụ bằng

A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{2}$.

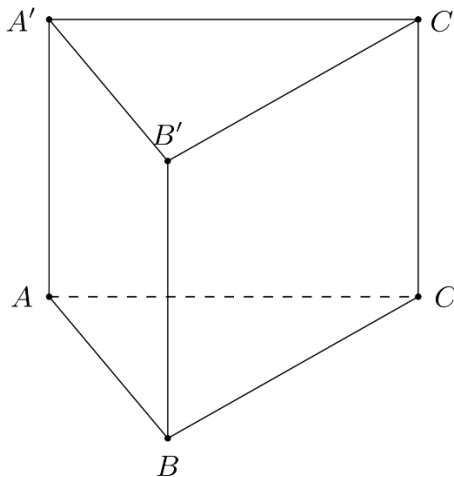
B. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{4}$.

C. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

D. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.S = a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 25: Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° . Khi đó thể tích khối lăng trụ là?

A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. $\frac{27}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích đáy là: $S = \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao khối lăng trụ là: $h = 2\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = Sh = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{27}{4}$.

Câu 26: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, đáy ABC là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Mặt phẳng $(BB'C'C)$ tạo với mặt phẳng $(A'B'C')$ góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3}{8}$.

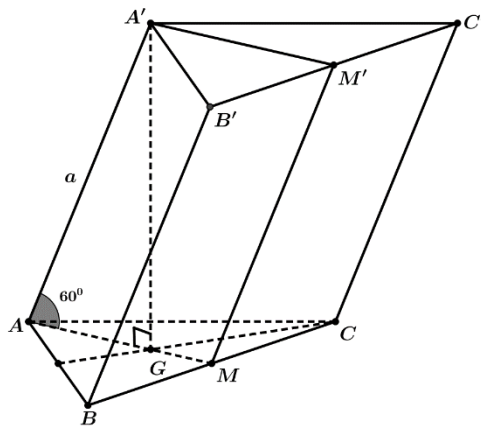
B. $V = \frac{27a^3}{32}$.

C. $V = \frac{3a^3}{32}$.

D. $V = \frac{9a^3}{32}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M , M' lần lượt là trung điểm của BC , $B'C'$ và G là trọng tâm tam giác ABC .

Vì tam giác ABC đều nên $BC \perp AM$. Mà $BC \perp A'G$ nên $BC \perp (AA'MM')$.

Khi đó $((ABC), (BCC'B')) = (AM, MM')$.

Xét hình bình hành $AA'MM'$ có $A'AM$ là góc nhọn và bù với góc AMM' nên

$$((ABC), (BCC'B')) = (AM, MM') = 180^\circ - AMM' = A'AM = 60^\circ.$$

Xét tam giác $AA'G$ vuông tại G , ta có $A'G = AA' \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AG = AA' \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$,

$$\Rightarrow AM = \frac{3}{2}AG = \frac{3a}{4}.$$

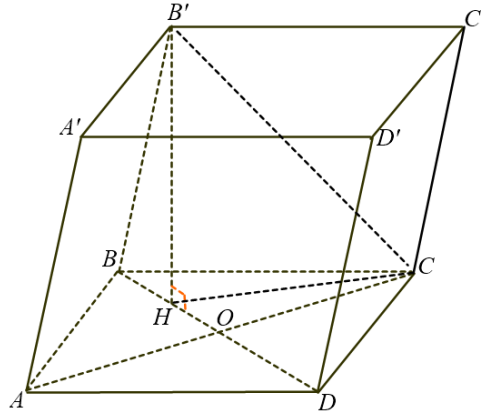
Xét tam giác ABM vuông tại M , ta có $\sin 60^\circ = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AM}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot A'G = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3}{32}.$$

- Câu 27:** Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi $ABCD$ tâm O có $AC = 2a$, $BD = 2a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt đáy trùng với trung điểm H của OB . Đường thẳng $B'C$ tạo với mặt đáy một góc 45° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho là
- A. $2a^3\sqrt{7}$. B. $2a^3\sqrt{3}$. C. $3a^3\sqrt{21}$. D. $a^3\sqrt{21}$.

Lời giải



Ta có $HO = \frac{BD}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $OC = \frac{AC}{2} = a$.

Xét tam giác OHC vuông tại O có: $HC = \sqrt{OH^2 + OC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Ta có $(B'C, (ABCD)) = (B'C, HC) = B'CH = 45^\circ$.

Xét $\triangle B'CH$ vuông tại H và $B'CH = 45^\circ$. Suy ra $\triangle B'CH$ vuông cân tại H .

Do đó $B'H = HC = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = B'H \cdot S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a\sqrt{3} = a^3\sqrt{21}.$$

- Câu 28:** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Tam giác $A'AB$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, mặt bên $(AA'C'C)$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{3a^3}{32}$.

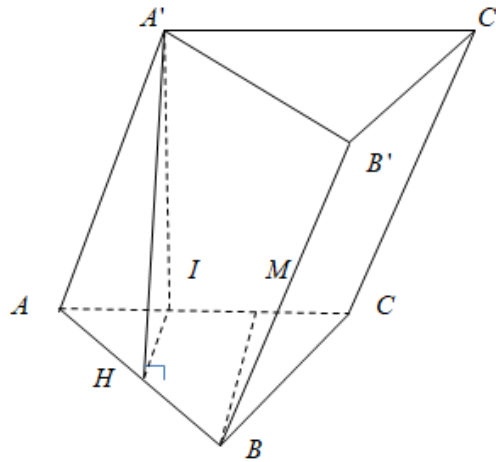
B. $V = \frac{3a^3}{16}$.

C. $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

D. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{16}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow A'H \perp AB$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (A'BC) \perp (ABC) \\ (A'BC) \cap (ABC) = AB \Rightarrow A'H \perp (ABC) \\ A'H \perp AB \end{cases}$$

Dựng $HI \perp AC \Rightarrow AC \perp (A'HI) \Rightarrow A'I \perp AC$

Suy ra $((ACC'A'); (ABC)) = (A'I; HI) = A'IH = 60^\circ$

$$\text{Dựng } BM \perp AC \Rightarrow HI = \frac{1}{2} BM = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Trong tam giác $A'IH$ có $A'H = HI \cdot \tan A'IH = \frac{a\sqrt{3}}{4} \tan 60^\circ = \frac{3a}{4}$

$$\text{Vậy thể tích lăng trụ: } V = S_{\triangle ABC} \cdot A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \frac{3a}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16}.$$

Câu 29: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 3. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB' . Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P , đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q . Thể tích khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. 2..

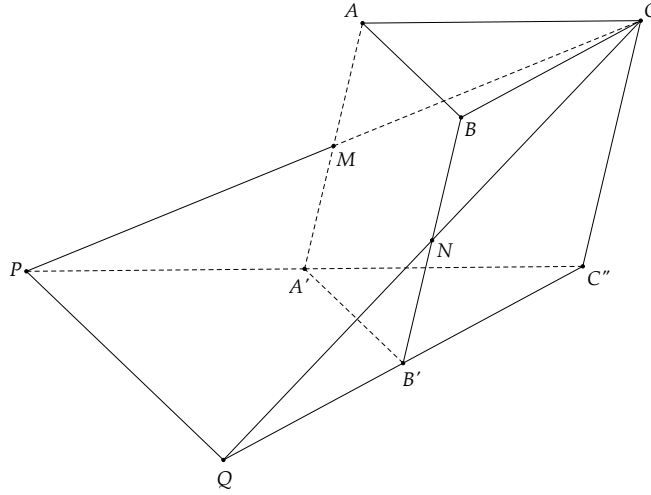
B. $\frac{2}{3}$..

C. 1..

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta thấy $A'B'$ là đường trung bình của tam giác $C'PQ$ nên $S_{C'PQ} = 4S_{A'B'C'}$.

$$\text{Ta được } V_{C.C'PQ} = \frac{1}{3} \cdot d(C, (A'B'C')) \cdot S_{C'PQ} = \frac{1}{3} \cdot d(C, (A'B'C')) \cdot 4S_{A'B'C'} = \frac{4}{3} V_{ABC.A'B'C'}. \quad (1)$$

Lại có

$$\begin{aligned} V_{C.ABMN} &= \frac{1}{3} d(C, (ABMN)) \cdot S_{ABMN} = \frac{1}{3} d(C, (ABMN)) \cdot \frac{1}{2} S_{ABB'A'} = \frac{1}{2} V_{C.ABB'A'} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}. \text{ Do đó } V_{CMN.A'B'C'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} \quad (2) \end{aligned}$$

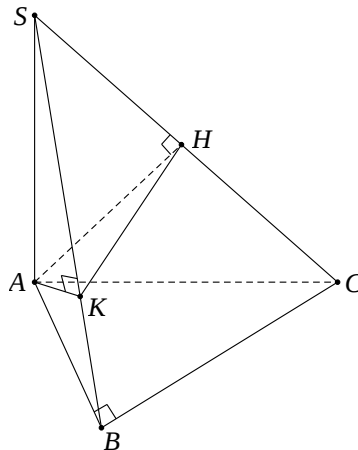
$$\text{Từ (1) và (2) ta được } V_{MA'P.NB'Q} = V_{C.C'PQ} - V_{CMN.C'A'B'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2..$$

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = a$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SC, SB . Biết góc giữa $(AHK), (ABC)$ bằng 45° . Tính thể tích khối tứ diện $ABHK$.

- A. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$. D. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{36}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $V_{ABHK} = V_{HABK}$, $V_{S.ABC} = V_{C.SAB}$. Khi đó: $\frac{V_{ABHK}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{HABK}}{V_{C.SAB}} = \frac{d(H, (SAB))}{d(C, (SAB))} \cdot \frac{S_{\Delta ABK}}{S_{\Delta SAB}}$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại B , $AB = a \Rightarrow BC = AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$, mà $AK \subset (SAB) \Rightarrow AK \perp BC$.

Khi đó $\begin{cases} AK \perp BC \\ AK \perp SB \end{cases} \Rightarrow AK \perp SC$ (1).

Mặt khác, ta lại có $AH \perp SC$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $SC \perp (AHK)$, lại có $SA \perp (ABC)$.

Suy ra $((AHK), (ABC)) = (SC, SA) = ASC$ (do tam giác SAC vuông tại A).

Theo giả thiết: $ASC = 45^\circ \Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}$ (do $\tan ASC = \frac{AC}{SA} = 1$).

Xét tam giác SAB vuông tại A có:

$$\frac{SK}{SB} = \frac{SK \cdot SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{(a\sqrt{2})^2}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2}} = \frac{2}{3}.$$

Xét tam giác SAC vuông tại A có:

$$\frac{SH}{SC} = \frac{SH \cdot SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{SA^2}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{(a\sqrt{2})^2}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{2}.$$

Ta có $HC \cap (SAB) = \{S\}$. Khi đó $\frac{d(H, (SAB))}{d(C, (SAB))} = \frac{SH}{SC} = \frac{1}{2}$.

$$\frac{S_{\Delta ABK}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{BK}{BS} = \frac{1}{3} \text{ (do } \frac{SK}{SB} = \frac{2}{3} \text{)}$$

$$\text{Khi đó } \frac{V_{HABK}}{V_{C.SAB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{HABK} = \frac{1}{6} V_{C.SAB} = \frac{1}{6} V_{S.ABC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} aa = \frac{a^3 \sqrt{2}}{36}$$

Câu 31: Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC , mặt phẳng (P) chứa AM và song song BD chia khối chóp thành hai khối đa diện. Đặt V_1 là thể tích khối đa diện có chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện có chứa đáy $ABCD$. Tỉ số

$$\frac{V_2}{V_1} \text{ là}$$

A. $\frac{V_2}{V_1} = 3.$

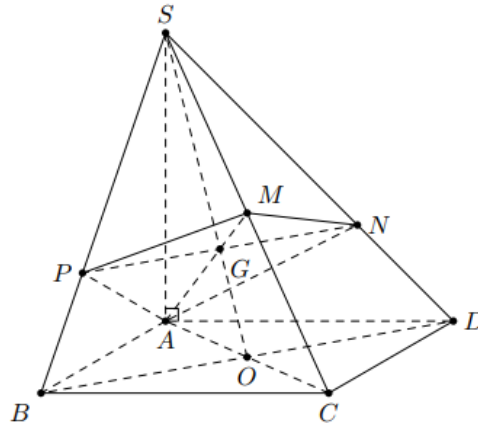
B. $\frac{V_2}{V_1} = 2.$

C. $\frac{V_2}{V_1} = 1.$

D. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{3}{2}.$

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$.

Khi đó SO cắt AM tại G . Suy ra G là trọng tâm tam giác SAC .

Do đó $\frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}.$

Trong mặt phẳng (SBD) , qua G kẻ d song song BD cắt SD , SB tại hai điểm N , P .

Khi đó ta có $\frac{SP}{SB} = \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$. Suy ra $\frac{V_1}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{4} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1 + 2 \right) = \frac{1}{3}$. Vậy $\frac{V_2}{V_1} = 2$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SA . Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với mặt phẳng (SBC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tính tỉ số của thể tích phần chứa đỉnh S và thể tích phần còn lại.

A. $\frac{5}{16}.$

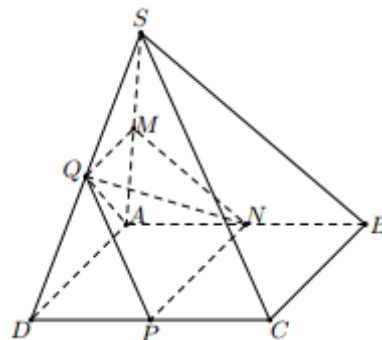
B. $\frac{5}{11}.$

C. $\frac{16}{5}.$

D. $\frac{11}{5}.$

Lời giải

Chọn D



Thiết diện là hình thang $MNPQ$ với N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, SD .

$$\text{Ta có } V_{MNPQAD} = V_{Q.ANPD} + V_{S.ABCD}$$

$$V_{Q.ANPD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD}$$

$$V_{N.AMQ} = \frac{1}{2} V_{N.ADQ} = \frac{1}{2} V_{Q.AND} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V_{Q.ANPD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} V_{S.ABCD} = \frac{1}{16} V_{S.ABCD}$$

$$\text{Vậy } V_{MNPQAD} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} + \frac{1}{16} V_{S.ABCD} = \frac{5}{16} V_{S.ABCD}$$

$$\text{Tỉ số thể tích cần tìm là: } \frac{\left(1 - \frac{5}{16}\right) V_{S.ABCD}}{\frac{5}{16} V_{S.ABCD}} = \frac{11}{5}.$$

Câu 33: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$ và diện tích tam giác SAB bằng a^2 . Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SB, SD . Thể tích khối đa diện $ABCKH$ bằng

A. $\frac{\sqrt{15}}{36} a^3$.

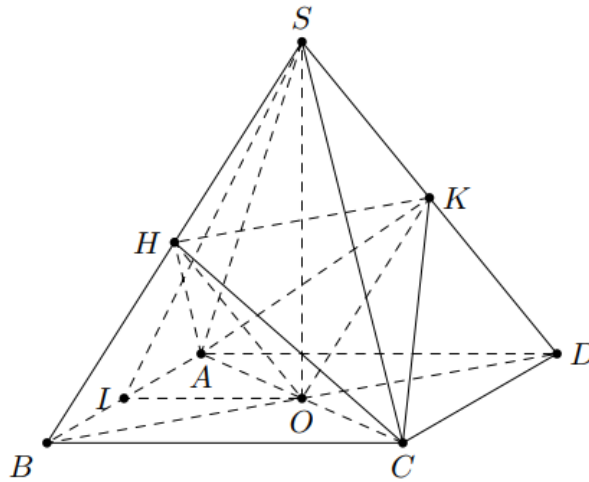
B. $\frac{\sqrt{15}}{4} a^3$.

C. $\frac{\sqrt{15}}{24} a^3$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{12} a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình $ABCD$ suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Gọi I là trung điểm AB suy ra $SI \perp AB$. Khi đó $SI = \frac{2S_{SAB}}{AB} = \frac{2a^2}{a} = 2a$.

Ta có $SO = \sqrt{SI^2 - IO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$ nên

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}.$$

Mặt khác O là trung điểm BD suy ra $S_{BOKH} = \frac{1}{2} S_{SBD}$.

Thể tích khối đa diện $ABCKH$ bằng

$$V_{ABCKH} = 2V_{A.BOKH} = 2 \cdot \frac{1}{2} V_{A.SBD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{15}}{12}.$$

Câu 34: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $36a^3$. Gọi I, J là hai điểm lần lượt thuộc BB', CC' thỏa mãn $\frac{B'I}{B'B} = \frac{C'J}{C'C} = \frac{2}{3}$ và M, N lần lượt là giao điểm của $A'I, A'J$ với mặt phẳng (ABC) . Tính thể tích khối đa diện $IJCBMN$.

A. $7a^3$.

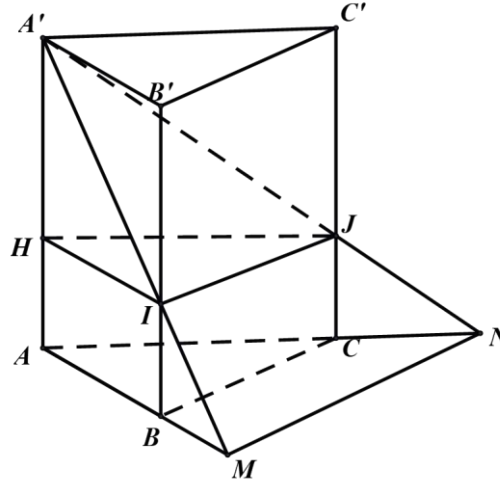
B. $12a^3$.

C. $9a^3$.

D. $6a^3$.

Lời giải

Chọn A



Không mất tính tổng quát, ta giả sử $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng. Khi đó, ta có:

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'A \cdot S_{ABC} = 36a^3.$$

$$\text{Ta có: } \frac{MI}{MA'} = \frac{MB}{MA} = \frac{IB}{A'A} = \frac{1}{3} \text{ và } \frac{NJ}{NA'} = \frac{NC}{NA} = \frac{IC}{A'A} = \frac{1}{3} \text{ suy ra } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{2}.$$

Do đó, ta có:

$$V_{A'.AMN} = \frac{1}{3} A'A \cdot S_{AMN} = \frac{1}{3} A'A \cdot \frac{9}{4} S_{ABC} = \frac{3}{4} \cdot 36a^3 = 27a^3.$$

Gọi $H \in A'A$ sao cho $\frac{A'H}{A'A} = \frac{2}{3}$. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} V_{A'.ABCJI} &= V_{IJH.ABC} + V_{A'.IJH} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} + \frac{1}{3} \cdot A'H \cdot S_{IJH} \\ &= \frac{1}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot A'A \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 36a^3 + \frac{2}{9} \cdot 36a^3 = 20a^3 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } V_{IJCBMN} = V_{A'.AMN} - V_{A'.ABCJI} = 27a^3 - 20a^3 = 7a^3.$$

Câu 35: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A thỏa mãn $AB = a, AC = a\sqrt{3}$, đồng thời $A'A, A'B, A'C$ cùng tạo với đáy một góc 60° . Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'C', BC$. Tính thể tích khối tứ diện $MNAH$.

A. $\frac{3a^3}{2}$.

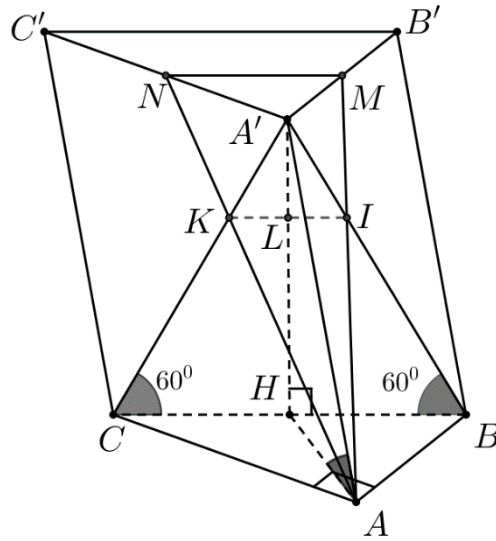
B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3}{4}$.

D. $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là hình chiếu của A' lên mp (ABC) , khi đó các tam giác $\triangle A'OA$, $\triangle A'OB$, $\triangle A'OC$ là các tam giác vuông tại O và bằng nhau. Khi đó $OA = OB = OC \Rightarrow O \equiv H$ hay $A'H \perp (ABC)$

Ta có $BC = 2a \Rightarrow HB = a \Rightarrow A'H = HB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$$\text{Do đó } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot A'H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \sqrt{3} \cdot a \sqrt{3} = \frac{a^3}{2}.$$

Gọi K là giao điểm của $A'C$ và NA , I là giao điểm của $A'B$ và MA , L là giao điểm của KI và $A'H$. Ta có $\frac{KA'}{KC} = \frac{IA'}{IB} = \frac{1}{2} \Rightarrow KI \parallel BC$ và $\frac{LA'}{LH} = \frac{1}{2}$.

$$V_{MNAH} = V_{H.AMN} = \frac{1}{3} S_{AMN} \cdot d(H, (AMN)) = \frac{1}{3} S_{AMN} \cdot 2d(A'; (AMN)) = 2V_{A'.AMN} = 2V_{A.A'MN}$$

Mặt khác, $V_{A.A'MN} = \frac{1}{4} V_{A'.ABC}$ (vì khối hai khối tứ diện có cùng chiều cao nhưng $S_{A'MN} = \frac{1}{4} S_{ABC}$)

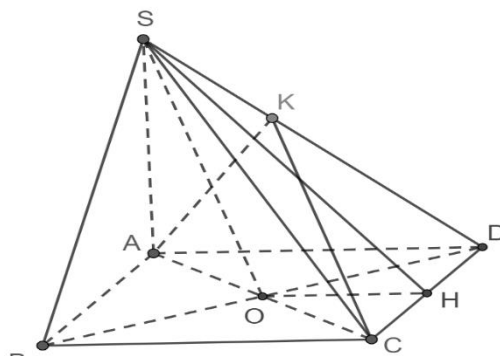
$$\text{Do đó } V_{MNAH} = 2 \cdot \frac{1}{4} V_{A'.ABC} = \frac{1}{2} V_{A'.ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{4}$$

D // BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

- a) Chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.
- b) Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.
- c) Số đo góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° .
- d) Côsin của số đo góc nhị diện $[S, CD, B]$ bằng $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Lời giải



Hình 45

a) Đúng: Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $OA = OB = OC = OD$, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ nên O là chân đường cao của khối chóp $S.ABCD$.

Khi đó, chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng SO .

$$\text{Trong hình vuông } ABCD, \text{ ta có: } AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } SAO \text{ vuông tại } O \text{ có: } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Vậy chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

b) Sai: Diện tích đáy $ABCD$ là: $S_{ABCD} = a^2$. Suy ra thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}.$$

c) Đúng: Vì $SO \perp (ABCD)$ nên OA là hình chiếu của SA trên $(ABCD)$. Khi đó góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SAO .

$$\text{Xét tam giác } SAO \text{ vuông tại } O \text{ có: } \cos SAO = \frac{AO}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $SAO = 30^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° .

d) Sai: Gọi H là hình chiếu của O trên CD . Vì OCD là tam giác vuông cân tại O nên H là trung điểm CD . Mà tam giác SCD cân tại S nên $SH \perp CD$.

Suy ra SHO là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S, CD, B]$.

$$\text{Xét tam giác } DBC \text{ có } OH \text{ là đường trung bình nên } OH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } SOH \text{ vuông tại } O \text{ có: } SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

$$\text{Suy ra } \cos SHO = \frac{OH}{SH} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{15}}{6} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Vậy cosin của số đo góc nhị diện $[S, CD, B]$ bằng $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $BAD = 120^\circ$, $AB = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của BC , biết $AMS = 60^\circ$.

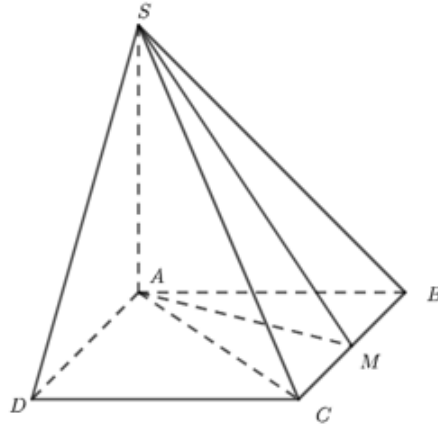
a) $SA \perp (ABCD)$.

b) $SA = 3a$.

$$\text{c) } V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$

d) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{3a}{4}$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có:
$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$$

b) Sai: Lại có $\angle BAD = 120^\circ \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều cạnh $a \Rightarrow AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét $\triangle SAM$: $\tan 60^\circ = \frac{SA}{AM} \Rightarrow SA = \frac{3}{2}a$

c) Sai: Ta có $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

d) Đúng: Kẻ $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{16}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{4}$

Do $AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(D, (SBC)) = d(A, (SBC)) = AH = \frac{3a}{4}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$.

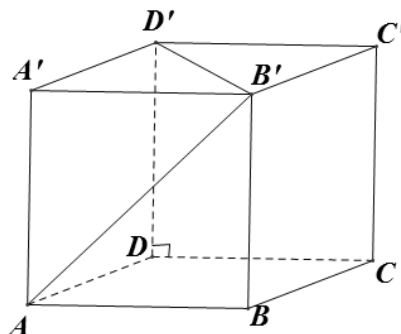
a) Công thức tính thể tích hình lăng trụ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA'$.

b) Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng $a^2\sqrt{2}$.

c) Chiều cao của hình lăng trụ bằng a .

d) Thể tích của khối lăng trụ bằng $2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

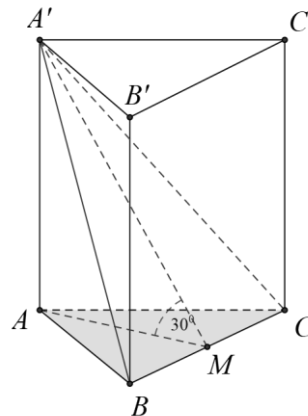


- a) Đúng: Công thức tính thể tích của khối chóp là: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA'$.
- b) Đúng: Diện tích đáy là: $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.
- c) Sai: Xét tam giác vuông ABB' có $AB'^2 = AB^2 + BB'^2 \Leftrightarrow (a\sqrt{5})^2 = a^2 + BB'^2 \Leftrightarrow BB' = 2a$.
- d) Đúng: Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{ABCD} \cdot AA' = a^2\sqrt{2} \cdot 2a = 2a^3\sqrt{2}$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và góc nhị diện $[A', BC, A]$ bằng 30° .

- a) Góc nhị diện bằng góc $A'MA$, với M là trung điểm của BC .
- b) Diện tích đáy của hình lăng trụ là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
- c) Chiều cao của hình lăng trụ bằng a .
- d) Thể tích khối lăng trụ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



- a) Đúng: Góc nhị diện $[A', BC, A]$ là góc giữa hai nửa mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) cạnh BC .

Gọi M là trung điểm của BC .

Vì tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$.

Lại có $AA' \perp BC$ nên $BC \perp A'M$.

Suy ra góc nhị diện $[A', BC, A]$ là góc $A'MA = 30^\circ$.

- b) Đúng: Diện tích tam giác đều ABC là: $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

- c) Sai: Vì tam giác ABC đều cạnh a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông $A'AM$ có $\tan A'MA = \frac{AA'}{AM} \Leftrightarrow AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{2}$.

- d) Sai: Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 5: Cho khối chóp cụt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ bằng a và khoảng cách giữa hai đáy bằng $3a$.

- a) Tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành.
b) Đáy lớn của khối chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích bằng $S_1 = a^2\sqrt{3}$.
c) Đáy nhỏ của khối chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích bằng $S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
d) Chiều cao của khối chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$ bằng $h = 3a$.

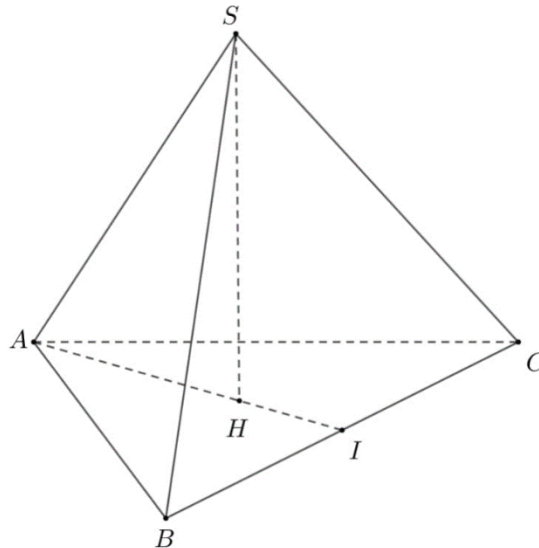
Lời giải

- a) Sai: Các mặt bên của khối chóp cắt đều là hình thang cân.
b) Đúng: Diện tích đáy lớn là $S_1 = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.
c) Đúng: Diện tích đáy nhỏ là $S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
d) Đúng: Chiều cao h của khối chóp cắt đều chính là khoảng cách giữa hai đáy nên $\Rightarrow h = 3a$.

Câu 6: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và thể tích bằng $\frac{a^3}{4\sqrt{3}}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) .

- a) H là trọng tâm của tam giác ABC .
b) $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
c) $SH = 2a$.
d) Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° .

Lời giải



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên H là trọng tâm tam giác ABC .

Gọi I là trung điểm BC . AI vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} \Rightarrow SH = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{4\sqrt{3}}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = a.$$

Xét tam giác SHA vuông tại H có: $\tan SAH = \frac{SH}{AH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$.

Vậy góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° .

a) Đúng: Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên H là trọng tâm tam giác ABC .

b) Sai: Gọi I là trung điểm BC . AI vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

c) Sai: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} \Rightarrow SH = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{4\sqrt{3}}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = a$.

d) Đúng: Xét tam giác SHA vuông tại H có: $\tan SAH = \frac{SH}{AH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$.

Vậy góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° .

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB = 2, AD = CD = 1$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SB .

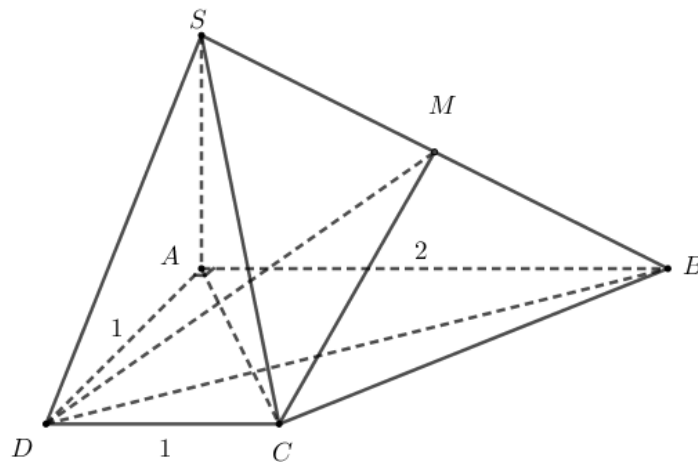
a) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SCD .

b) Chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\sqrt{6}$.

c) Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

d) Thể tích của khối chóp $M.BCD$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải



a) Sai: Vì A là hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SCA .

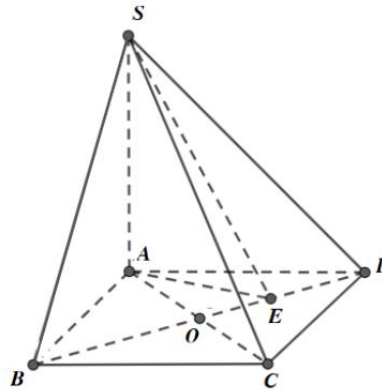
b) Đúng: Ta có: $h = SA = AC \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

- c) Đúng: Ta có: $B = S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2} \cdot AD = \frac{2+1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
- d) Đúng: Ta có: $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Mặt khác, M là trung điểm của đoạn thẳng SB nên suy ra: $d(M, (ABCD)) = \frac{1}{2} d(S, (ABCD)) = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Do đó $V_{M.BCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = a$ và $AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60° .

- a) Chiều cao của khối chóp đã cho là cạnh bên SB .
- b) Diện tích mặt đáy của hình chóp đã cho là $S_{ABCD} = 2a^2$
- c) Thể tích của khối chóp $V_{D.SAC} = V_{B.SAD}$
- d) Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{15}}{15}$

Lời giải



- a) Sai: Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA$ là chiều cao của khối chóp.
- b) Đúng: Ta có diện tích của mặt đáy là: $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a \cdot 2a = 2a^2$.
- c) Đúng: Ta có $V_{D.SAC} = V_{S.ACD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$
- $V_{B.SAD} = V_{S.ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$
- Suy ra: $V_{D.SAC} = V_{B.SAD}$
- d) Sai: Kẻ $AE \perp BD$ tại $E \Rightarrow \left((SBD), (ABCD) \right) = \angle SEA = 60^\circ$

Xét $\triangle ABD$ vuông tại A . Ta có $AE = \frac{AD \cdot AB}{\sqrt{AD^2 + AB^2}} = \frac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Xét $\triangle SAE$ vuông tại A

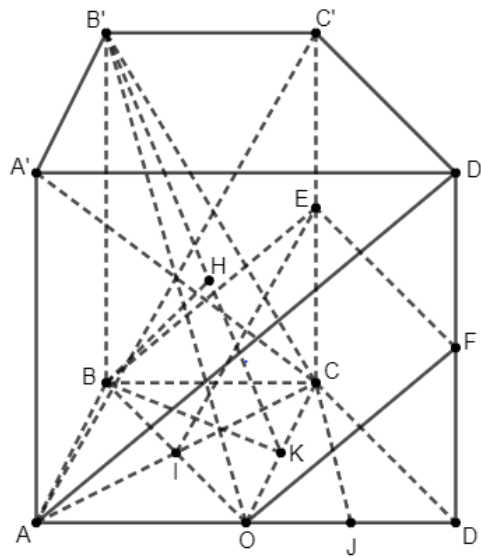
$$SA = AE \cdot \tan 60^\circ = \frac{2a\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{3} = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$$

$$\text{Khi đó thể tích } S.ABCD : V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{15}}{5} \cdot 2a^2 = \frac{4a^3\sqrt{15}}{15}$$

Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang cân, $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

- Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\angle CA'A$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C$ bằng khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(B'CO)$.
- Thể tích của hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $\frac{9a^3}{4}$.
- Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với đường thẳng $A'C$. Biết (P) chia khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện. Thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A bằng $\frac{15a^3}{8}$.

Lời giải



a) Sai: Vì $A'A \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của $A'C$ trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Vậy $(A'C, (ABCD)) = \angle A'CA \Rightarrow \angle A'CA = 45^\circ$.

b) Đúng: Ta có $AB \parallel (B'CO) \Rightarrow d(AB, B'C) = d(AB, (B'CO)) = d(B, (B'CO))$.

c) Đúng: Gọi O là trung điểm của AD

$\Rightarrow ABCO$, $BCDO$ là các hình thoi cạnh a và ABO , BCO , CDO là các tam giác đều cạnh a .

Có $(A'C, (ABCD)) = \angle A'CA \Rightarrow \angle A'CA = 45^\circ$

$\Rightarrow$ tam giác $AA'C$ vuông cân tại $A \Rightarrow AA' = a\sqrt{3} \Rightarrow BB' = a\sqrt{3}$.

Mặt khác: $S_{ABCD} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = a\sqrt{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9a^3}{4}.$$

d) Đúng: Có $BO \perp AC, BO \perp AA' \Rightarrow BO \perp A'C$ (1)

Gọi I là tâm hình thoi $ABCO$, E và F lần lượt là trung điểm của CC' và DD'

$\Rightarrow BEFO$ là hình bình hành

Có $IE \parallel AC', AC' \perp A'C$ (do $\Rightarrow ACC'A'$ là hình vuông) $\Rightarrow IE \perp A'C$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow (BEFO) \perp A'C \Rightarrow (BEFO)$ chính là mặt phẳng (P) đi qua B và vuông góc với $A'C$

(P) chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện, gồm khối lăng trụ tam giác $BCE.ODF$ và khối đa diện có các đỉnh $A, B, E, F, O, A', B', C', D'$ (khối này chứa đỉnh A, có thể tích V cần tính)

Gọi J là trung điểm của $OD \Rightarrow CJ \perp (ADD'A')$ và $CJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$S_{ODF} = \frac{1}{4} S_{ADD'} = \frac{1}{8} S_{ADD'A'} = \frac{1}{8} a\sqrt{3} \cdot 2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow V_{BCE.ODF} = CJ \cdot S_{ODF} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{8}$$

$$\text{Vậy thể tích cần tính là } V = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{BCE.ODF} = \frac{9a^3}{4} - \frac{3a^3}{8} = \frac{15a^3}{8}.$$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Biết $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên SM .

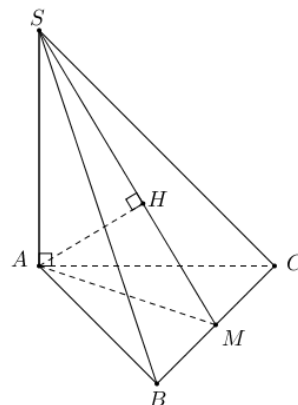
a) Đường thẳng AH vuông góc với mặt phẳng (SBC) .

b) Đường thẳng SH là hình chiếu của đường thẳng SA lên mặt phẳng (SBC)

c) Độ dài đoạn thẳng AH bằng $\frac{6a}{11}$

d) Cosin góc tạo bởi đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{11}}{33}$

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên SM .

Ta có: $AH \perp SM$.

Mặt khác $BC \perp (SAM)$ nên $BC \perp AH$. Ta suy ra $AH \perp (SBC)$.

Nên SH là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (SBC) .

Ta suy ra góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) là góc $\alpha = ASH$.

Xét tam giác SAM vuông tại A ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{11}{6a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{6a^2}{11} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{66}}{11}.$$

$$\text{Xét tam giác } SAH \text{ vuông tại } H \text{ ta có: } \sin ASH = \frac{AH}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{66}}{11}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{33}}{11}.$$

a) Đúng: Đường thẳng AH vuông góc với mặt phẳng (SBC) .

b) Đúng: Đường thẳng SH là hình chiếu của đường thẳng SA lên mặt phẳng (SBC) .

c) Sai: Độ dài đoạn thẳng AH bằng $\frac{6a}{11}$.

d) Sai: Cosin góc tạo bởi đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{33}}{11}$.

Câu 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A có $AB = AC = a$.

Biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

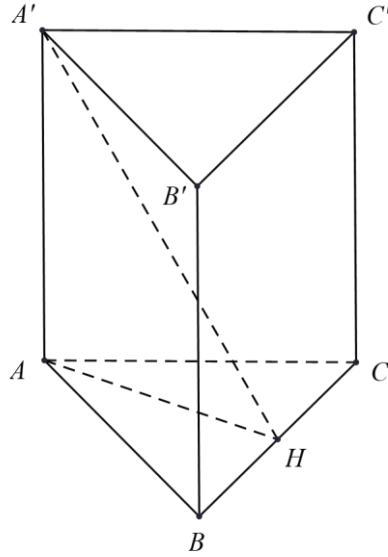
a) Diện tích đáy của lăng trụ là $S_{ABC} = a^2$.

b) Độ dài đường cao của lăng trụ bằng $\frac{a}{2}$.

c) Thể tích khối lăng trụ là $V = \frac{a^3}{2}$.

d) Thể tích khối chóp $A.A'B'C'$ là $V' = \frac{a^3}{6}$.

Lời giải



a) Sai: Diện tích đáy của lăng trụ là $S_{ABC} = \frac{a^2}{2}$.

b) Sai: Dựng $AH \perp BC$, có $BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (A'HA) \Rightarrow BC \perp A'H$.

Mặt khác $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow A'H = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$.

Do $AH = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AA' = \sqrt{A'H^2 - AH^2} = a$.

c) Đúng: Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3}{2}$.

d) Đúng: $V' = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3}{6}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD .

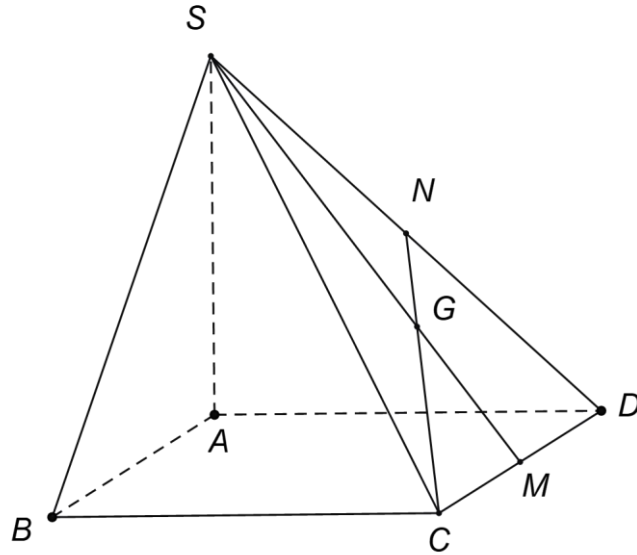
a) Thể tích khối chóp được xác định bởi công thức $V = Bh$

b) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng a^3 .

c) Thể tích khối chóp $S.BCD$ bằng $\frac{a^3}{6}$.

d) Thể tích khối chóp $G.ABCD$ bằng $\frac{a^3}{9}$.

Lời giải



a) Sai: $V = \frac{1}{3} Bh$

b) Sai: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA.AB.AD = \frac{a^3}{3}$

c) Đúng: $V_{S.BCD} = \frac{1}{3} SA. \frac{1}{2} BC.BD = \frac{a^3}{6}$

d) Đúng: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và SD .

Ta có $\frac{1}{3} = \frac{GM}{SM} = \frac{d(G, (ABCD))}{d(S, (ABCD))}$.

Ta có $V_{G.ABCD} = \frac{1}{3} d(G, (ABCD)).S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \frac{a^3}{9}$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° .

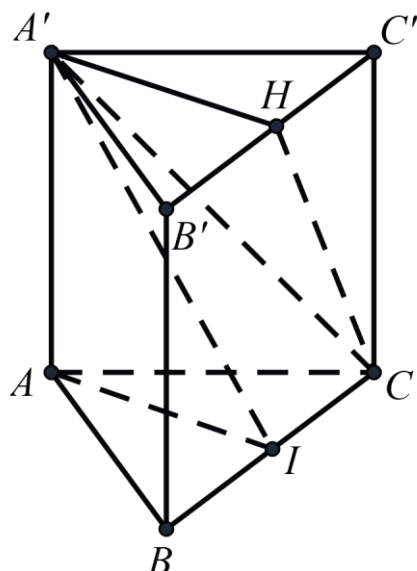
a) Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng a .

b) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

c) Tang của góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

d) Thể tích khối chóp $A'.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải



Dựng $A'H \perp B'C' \Rightarrow H$ là trung điểm của $B'C'$.

Mặt khác $A'H \perp BB' \Rightarrow A'H \perp (BCC'B')$.

Khi đó $(A'C; (BCC'B')) = A'CH = 30^\circ$

$$\text{Ta có: } \sin A'CH = \frac{A'H}{A'C} \Leftrightarrow \sin 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{A'C} \longrightarrow A'C = a\sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra } AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{a) Sai: } d(A', (BCC'B')) = A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) Sai: Thể tích khối lăng trụ là: } V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$$

c) Đúng: Gọi I là trung điểm của BC . Ta có: $((A'BC), (ABC)) = A'IA$

$$\tan A'IA = \frac{AA'}{AI} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{d) Đúng: Thể tích khối chóp } A'.ABC \text{ bằng } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3\sqrt{6}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$$

Câu 14: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A ; $BC = 2a$; $\angle ABC = 30^\circ$.
Cạnh bên của lăng trụ bằng $2a\sqrt{3}$.

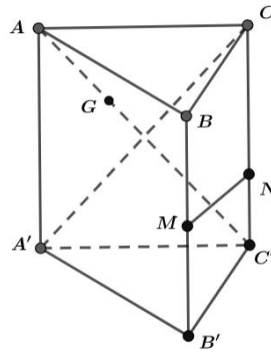
$$\text{a) Thể tích của lăng trụ } ABC.A'B'C', V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC}.$$

b) Thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được tính theo a bằng a^3 .

c) Thể tích của khối chóp $A.BCC'B'$ bằng $2a^3$.

d) Gọi G là trọng tâm của tam giác ACA' , M là trung điểm của BB' , N trên cạnh CC' sao cho $CN = 2NC'$. Thể tích của khối chóp $G.BCNM$ bằng $\frac{7}{9}a^3$.

Lời giải



a) Đúng: Theo giả thiết, $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên AA' là chiều cao của lăng trụ, do đó $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC}$

b) Sai: Xét tam giác ABC vuông tại A có $AC = 2a \sin 30^\circ = a$; $AB = 2a \cos 30^\circ = a\sqrt{3}$.

Trong đó $h = AA' = 2a\sqrt{3}$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2.$$

Vậy $V_{lt} = 3a^3$.

c) Đúng: Ta có, $V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3} AA' \cdot S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}$ mà $V_{A.A'B'C'} + V_{A.BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'}$ nên

$$V_{A.BCC'B'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3} \cdot 3a^3 = 2a^3$$

d) Đúng: Do G là trọng tâm của tam giác ACA' nên $\frac{GC'}{AC'} = \frac{2}{3}$ nên $\frac{d(G; (BCC'B'))}{d(A; (BCC'B'))} = \frac{GC'}{AC'} = \frac{2}{3}$

Từ đó suy ra $d(G; (BCC'B')) = \frac{2}{3} d(A; (BCC'B'))$. Mặt khác tứ giác $BCNM$ là hình thang

$$\text{vuông tại } B, C \text{ nên } S_{BCNM} = \frac{(BM + CN) BC}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2} BB' + \frac{2}{3} CC'\right) BC}{2} = \frac{7}{12} BB' \cdot BC = \frac{7}{12} S_{BCC'B'}.$$

Vì vậy ta có :

$$V_{G.BCNM} = \frac{1}{3} d(G; (BCNM)) \cdot S_{BCNM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} d(A; (BCC'B')) \cdot \frac{7}{12} S_{BCC'B'} = \frac{7}{18} V_{A.BCC'B'} = \frac{7}{18} \cdot 2a^3 = \frac{7}{9} a^3$$

Câu 15: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy.

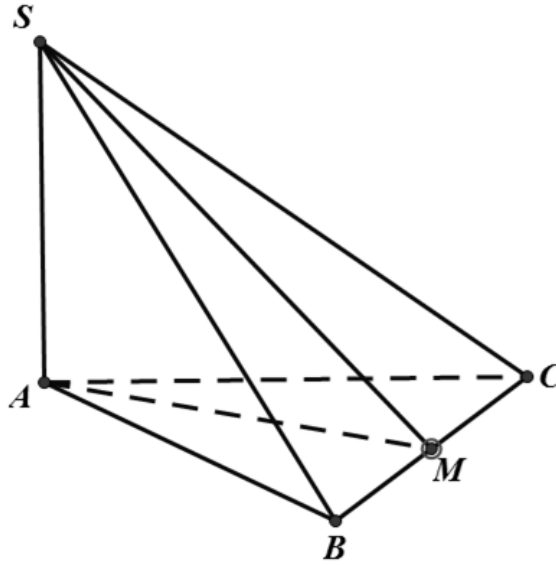
a) Nếu $SA = a\sqrt{3}$ thì thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{4}$.

b) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng a^3 thì chiều cao khối chóp đã cho bằng $2a\sqrt{3}$.

c) Nếu $SC = a\sqrt{3}$ thì thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

d) Nếu góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 30° thì thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải



a) Sai: Diện tích đáy $B = S_{ABC} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Chiều cao: $h = a\sqrt{3}$

Vậy thể tích cần tìm là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{2}$.

b) Đúng: Chiều cao khối chóp $h = \frac{3V}{B} = \frac{3a^3}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = 2a\sqrt{3}$.

c) Đúng: Chiều cao $h = SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - (a\sqrt{2})^2} = a$.

Vậy thể tích cần tìm là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

d) Sai: Từ A kẻ $AM \perp BC$, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \\ BC \perp AM \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAM)$$

$$\left. \begin{array}{l} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp (SAM) \\ (SAM) \cap (SBC) = SM; (SAM) \cap (ABC) = AM \end{array} \right\} \Rightarrow ((SBC), (ABC)) = SMA = 30^\circ$$

Xét tam giác vuông AMB ta có $AM^2 = AB^2 - BM^2 = (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Xét tam giác vuông SAM ta có $SA = AM \cdot \tan SMA = \frac{a\sqrt{6}}{2} \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Suy ra: } V_{SABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\square ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$, có $AB = 193\text{cm}$, $BC = 194\text{cm}$, $CA = 195\text{cm}$, hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 45° .

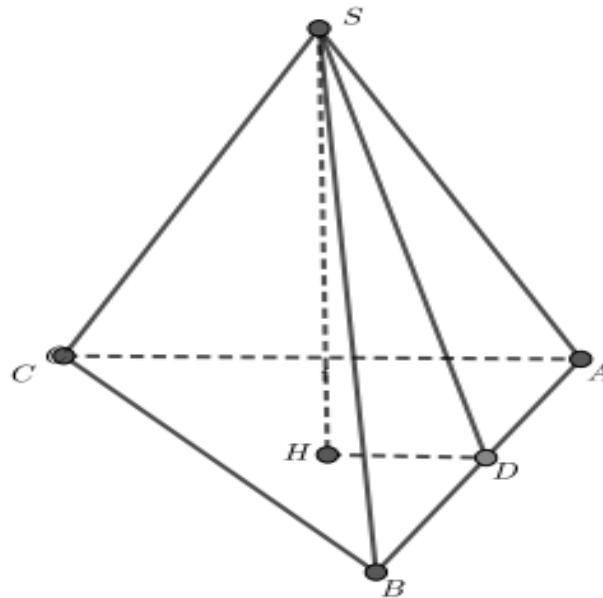
a) Gọi H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Trong tam giác ABC , kẻ HD vuông góc với AB tại D . Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là $SBH = 45^\circ$.

b) Diện tích đáy của hình chóp là $S_{ABC} = 16296\text{cm}^2$.

c) Chiều cao của hình chóp là 56cm .

d) Thể tích khối chóp đã cho là 912576 cm^3 .

Lời giải



a) Sai: Gọi H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Trong tam giác ABC , kẻ HD vuông góc với AB tại D . HD bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là góc $SDH = 45^\circ$.

b) Đúng: Nửa chu vi tam giác ABC là $p = \frac{AB + BC + CA}{2} \Rightarrow p = 291(\text{cm})$.

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow S_{ABC} = 16296(\text{cm}^2).$$

c) Đúng: Ta lại có $S_{ABC} = p \cdot r \Leftrightarrow S_{ABC} = p \cdot HD \Rightarrow HD = \frac{S_{ABC}}{p} \Rightarrow HD = 56$.

Xét tam giác SDH vuông tại H có $HD = 56$, $SDH = 45^\circ$

Suy ra $SH = DH = 56(cm)$.

d) Sai: Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{S_{ABC}} \cdot SH \Rightarrow V = 304192(cm^3)$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với đáy, với $SA = \frac{a}{2}$.

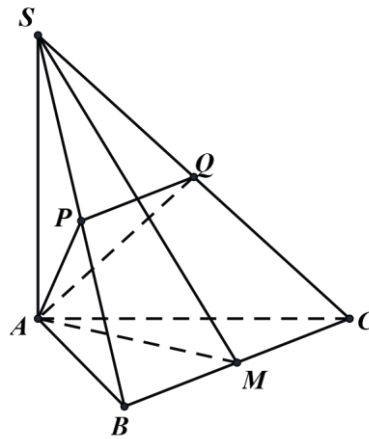
a) Diện tích đáy của hình chóp $S.ABC$ là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

b) Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

c) Góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60° .

d) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm SB, SC . Thể tích khối chóp $ABCQP$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Lời giải



a) Đúng : Diện tích đáy của hình chóp $S.ABC$ là $S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

b) Sai : Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

c) Sai : Gọi M là trung điểm của cạnh BC .

Ta có : $BC \perp AM$ (AM là đường trung tuyến của ΔABC đều)

$BC \perp SA$ ($SA \perp (ABC)$)

Do đó: $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$

Ta có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SM \perp BC, SM \subset (SBC) \\ AM \perp BC, AM \subset (ABC) \end{cases}$

Do đó: góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) là góc SMA

Xét tam giác đều ABC : $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác vuông SMA có: $\tan SMA = \frac{SA}{AM} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Suy ra: $SMA = 30^\circ$

Vậy góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 30° .

d) Sai: Ta có: $\frac{V_{S.APQ}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SP}{SB} \cdot \frac{SQ}{SC} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Suy ra $V_{S.APQ} = \frac{1}{4}V_{S.ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{24} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$

Do đó: $V_{A.BCQP} = V_{S.ABC} - V_{S.APQ} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24} - \frac{a^3\sqrt{3}}{96} = \frac{a^3\sqrt{3}}{32}$

Câu 18: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 6. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 30° .

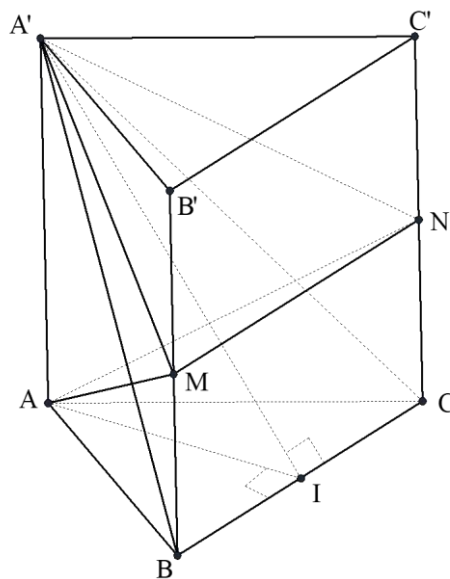
a) Diện tích đáy của hình lăng trụ đã cho là $S_{ABC} = 9\sqrt{3}$.

b) Hình lăng trụ đã cho có chiều cao $h = 3\sqrt{3}$.

c) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = 27\sqrt{3}$.

d) Thể tích của tứ diện $A'MN$ bằng $3\sqrt{3}$ với M, N lần lượt là trung điểm cạnh BB', CC' .

Lời giải



a) Đúng: Ta có $S_{ABC} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

b) Sai: Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AB . Ta có

$$\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ (A'AI) \perp BC \quad (A'A \perp BC, AI \perp BC) \\ (A'AI) \cap (A'BC) = A'I \\ (A'AI) \cap (ABC) = AI \end{cases}$$

Nên $((A'BC), (ABC)) = (A'I, AI) = A'IA = 30^\circ$.

$$\tan 30^\circ = \frac{A'A}{AI} \Rightarrow A'A = AI \cdot \tan 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3 \text{ hay } h = 3.$$

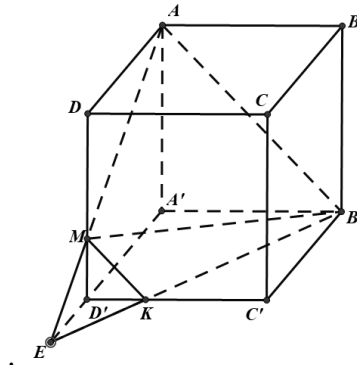
c) Đúng: Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'A = 9\sqrt{3} \cdot 3 = 27\sqrt{3}$.

d) Sai: Ta có $V_{A'B'C'NM} = \frac{1}{2} V_{A'B'C'CB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{A'B'C'ABC} = \frac{1}{3} V_{A'B'C'ABC}$.

Và $V_{ABCNM} = \frac{1}{2} V_{AB'C'CB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{A'B'C'ABC} = \frac{1}{3} V_{A'B'C'ABC}$.

Do đó $V_{A'AMN} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot 27\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

Câu 19: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi M là điểm thuộc cạnh DD' sao cho $MD' = \frac{1}{3} DD'$. Mặt phẳng (AMB') cắt cạnh $C'D'$ tại K , $K = B'E \cap C'D'$ như hình vẽ sau:



a) Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = a^3$

b) Thể tích khối đa diện $D'KM.AA'B'$ là $V_{D'KM.AA'B'} = \frac{1}{27} a^3$

c) Tỉ số thể tích khối đa diện $D'KM.AA'B'$ và $ABCD.A'B'C'D'$ là $\frac{V_{AA'B'KMD'}}{V} = \frac{13}{54}$

d) Thể tích khối đa diện lồi $ABCDMKC'B'$ bằng $\frac{26}{27} a^3$.

Lời giải

a) Đúng: Vì thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a là $V = a^3$

b) Sai: Ta thấy $MD' = \frac{a}{3}$, $ED' = \frac{1}{3} EA' = \frac{a}{2}$; $KD' = \frac{a}{3}$.

$$\Rightarrow V_{AA'B'KMD'} = V_{A.A'B'E} - V_{M.D'EK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot a \cdot a - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} = \frac{13}{54} a^3$$

c) Đúng: Vì $\frac{V_{AA'B'KMD'}}{V} = \frac{13}{54}$.

d) Sai: Vì $V_{ABCDMKC'B'} = V - V_{AA'B'MDK} = a^3 - \frac{13}{54}a^3 = \frac{41}{54}a^3$.

Câu 20: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh 2. Hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng đáy trùng trung điểm H của cạnh AB , biết góc giữa $B'H$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30° . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

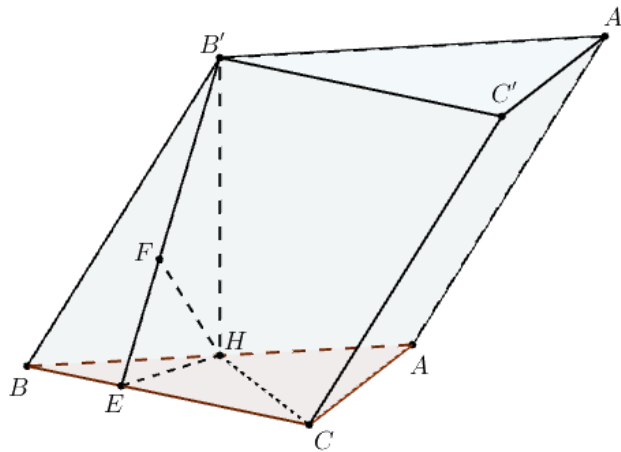
a) Diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{3}$.

b) Khoảng cách từ điểm H đến cạnh BC bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Chiều cao hạ từ đỉnh B' xuống mặt đáy (ABC) bằng $\frac{3}{4}$.

d) Thể tích của khối lăng trụ bằng $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải



a) Sai: Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

Đúng: Dựng $HE \perp BC$, tam giác BEH vuông tại E , $HBE = 60^\circ$ có:

$$HE = HB \sin HBE = 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) Sai: Kẻ $HF \perp B'E$ ta có: $\begin{cases} BC \perp B'H \\ BC \perp HE \end{cases}$ suy ra $BC \perp HF \Rightarrow HF \perp (B'BCC')$

$$\Rightarrow (B'H, (BCC'B')) = HB'F = HB'E \Rightarrow HB'E = 30^\circ.$$

d) Đúng: Khi đó $B'H = \frac{HE}{\tan 30^\circ} = \frac{3}{2}$

$$\text{Vậy } V = V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot B'H = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Câu 21: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

a) Nếu $AB = 3a, AD = 4a, AA' = a$ thì $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 12a^3$.

b) Giả sử $AB = 3a, AD = 4a$, đường chéo BD' hợp với đáy $ABCD$ một góc 60° . Khi đó thể tích khối hộp chữ nhật đã cho là $60\sqrt{3}a^3$.

c) Giả sử $AB = 3a, AD = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(ABCD)$ bằng 30° . Thể tích khối hộp

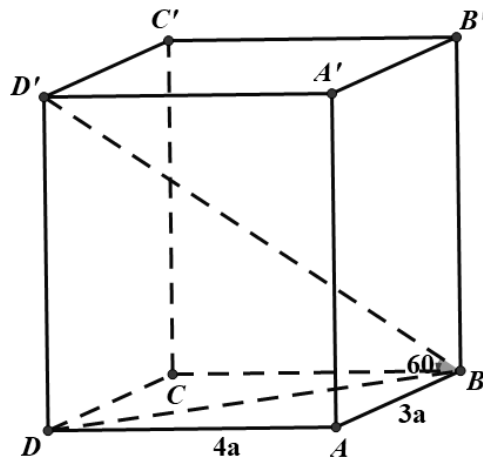
chữ nhật đã cho bằng $48\sqrt{3}a^3$

d) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Biết rằng đáy là hình vuông, $AA' = 2a$, khoảng cách từ G đến mặt

phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{4a}{9}$. Thể tích khối hộp chữ nhật đã cho bằng $\frac{64\sqrt{5}a^3}{5}$

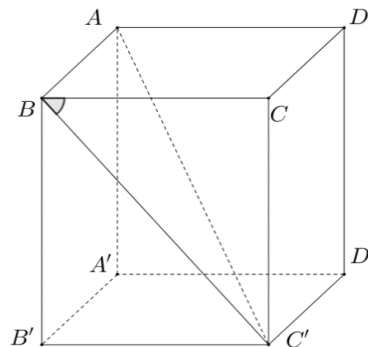
Lời giải

a) Đúng: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AD \cdot AA' = 12a^3$



b) Đúng: $DD' \perp (ABCD) \Rightarrow (BD'; (ABCD)) = DBD' = 60^\circ \Rightarrow DD' = BD \cdot \tan 60^\circ = 5a\sqrt{3}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AD \cdot DD' = 60\sqrt{3}a^3$

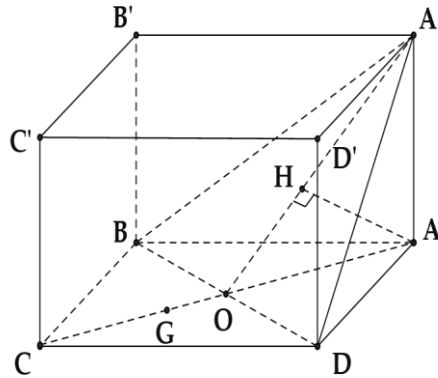


c) Sai: Ta có
$$\begin{cases} (ABC') \cap (ABCD) = AB \\ BC' \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow ((ABC'), (ABCD)) = C'BC = 30^\circ.$$

Tam giác $C'BC$ vuông tại C nên $CC' = BC \cdot \tan C'BC = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = AB \cdot AD \cdot CC' = 3a \cdot 4a \cdot \frac{4\sqrt{3}a}{3} = 16\sqrt{3}a^3$.

d) Sai: Gọi O là giao điểm của AC và BD .



Ta có $AG \cap (A'BD) = O$ nên $d(A, (A'BD)) = \frac{AO}{GO} d(G, (A'BD)) = 3d(G, (A'BD)) = \frac{4a}{3}$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'O)$, trong $(AA'O)$ dựng $AH \perp A'O$ tại H .

Khi đó $\begin{cases} AH \perp BD \\ AH \perp A'O \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BD) \Rightarrow d(A, (A'BD)) = AH \Rightarrow AH = \frac{4a}{3}$.

Gọi $x > 0$ là cạnh hình vuông $ABCD$, ta có $AO = \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Khi đó

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AO^2} + \frac{1}{AA'^2} \Leftrightarrow \frac{9}{16a^2} = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{4a^2} \Rightarrow \frac{2}{x^2} = \frac{5}{16a^2} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{10}a}{5}.$$

Thể tích khối hộp chữ nhật $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AD \cdot AA' = \frac{4\sqrt{10}a}{5} \cdot \frac{4\sqrt{10}a}{5} \cdot 2a = \frac{64a^3}{5}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết góc giữa cạnh SC và mặt đáy bằng 60° .

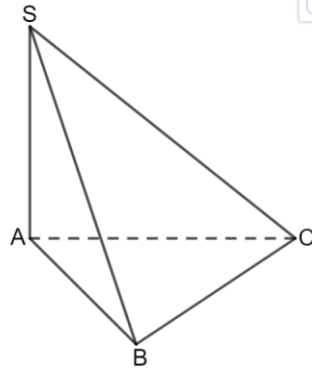
a) Chiều cao của hình chóp $S.ABC$ là SA .

b) Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc SCA .

c) Diện tích tam giác ABC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

d) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải



Ta có $SC \cap (ABC) = C$, $SA \perp (ABC)$ suy ra AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$
 Vậy góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng AC , SC và bằng góc SCA .

a) Đúng: Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

b) Đúng: Chiều cao hình chóp $S.ABC$ là $SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

c) Sai: Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{4}$.

d) Đúng

Câu 23: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Mặt bên $(A'B'BA)$ vuông góc với mặt đáy, biết $A'AB$ là tam giác cân, góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và $(ABCD)$ bằng 60° .

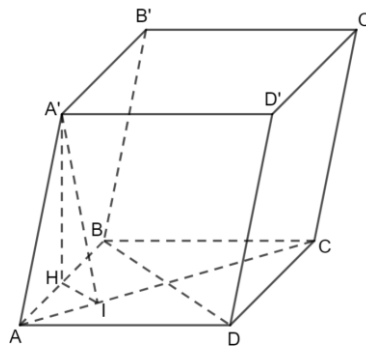
a) Gọi $A'H$ là đường cao của tam giác cân $A'AB$. Khi đó, H là trung điểm AB .

b) Chiều cao của lăng trụ là AA' .

c) Diện tích hình vuông $ABCD$ bằng $a^2\sqrt{2}$.

d) Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi $A'H$ là đường cao của tam giác cân $A'AB$. Khi đó, H là trung điểm AB .

a) Đúng: Vì $(A'B'BA) \perp (ABCD)$, $A'H \perp AB$ suy ra $A'H \perp (ABCD)$.

b) Sai: Kẻ $HI \perp AC$ tại I , $AC \perp A'H$ suy ra $AC \perp A'I$

Góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$, $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng $A'I$, HI và bằng góc $A'IH$.

$$BD = 2a, HI = \frac{1}{4}BD = \frac{a}{2}.$$

Chiều cao của lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $A'H = HI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ bằng $S_{ABCD} = 2a^2$.

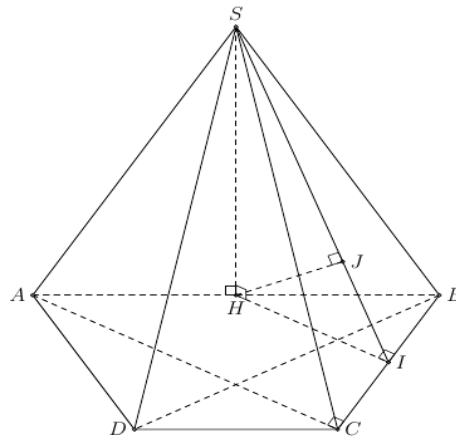
c) Sai: Diện tích hình vuông $ABCD$ bằng $S_{ABCD} = 2a^2$.

d) Đúng: Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $a^3\sqrt{3}$.

E BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân với $AB = 2a, AD = BC = CD = a$ mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải.



Gọi I, H lần lượt là trung điểm AB, BC . Ta có
$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \perp AB \end{cases}$$

Hình thang cân $ABCD$ có
$$\begin{cases} HA = HB = \frac{AB}{2} = a \\ AD = DC = BC = a \end{cases} \Rightarrow \triangle BHC \text{ đều} \Rightarrow HI \perp BC.$$

Mà $AC \parallel HI \Rightarrow AC \perp BC \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$.

Vì H là trung điểm $AB \Rightarrow d(H, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Do
$$\begin{cases} BC \perp HI \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHI) \Rightarrow (SHI) \perp (SBC).$$

Trong mặt phẳng (SHI) , kẻ $HJ \perp SI, J \in SI \Rightarrow HJ \perp (SBC) \Rightarrow HJ = d(H, (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Có $HI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao trong tam giác đều cạnh a).

$$\text{Mặt khác } \frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} \Leftrightarrow SH^2 = 3a^2 \Leftrightarrow SH = a\sqrt{3}.$$

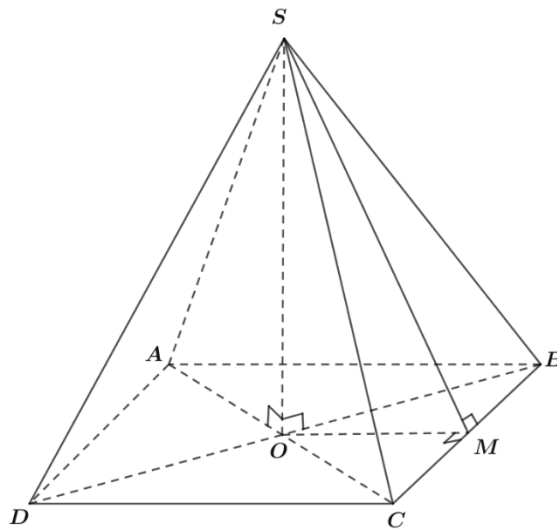
$$\text{Ba tam giác } \triangle ADH, \triangle HDC, \triangle HBC \text{ đều cạnh } a \Rightarrow S_{ABCD} = 3S_{\triangle ADH} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABCD = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}.$$

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° .

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{m\sqrt{3}a^3}{n\sqrt{5}}$; $m; n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản.

Lời giải.



$ABCD$ là hình vuông có tâm O và cạnh bằng x .

Gọi M là trung điểm của BC . Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là góc SMO bằng 60° .

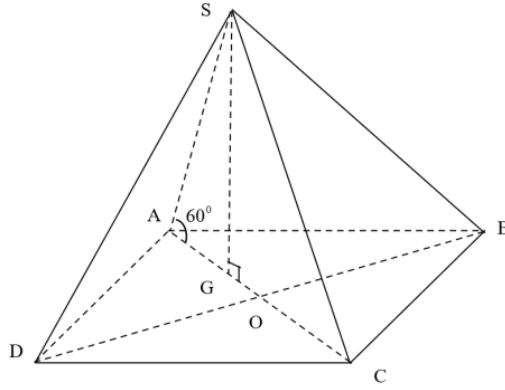
$$\text{Ta có } SM^2 = 4a^2 - \frac{x^2}{4}, SO^2 = 4a^2 - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Và } \cos SMO = \frac{OM}{SM} \Leftrightarrow \cos 60^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{\frac{x^2}{4}}{4a^2 - \frac{x^2}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{4a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Suy ra } SO = \sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{5}}. \text{ Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot AB^2 = \frac{32\sqrt{3}a^3}{15\sqrt{5}}.$$

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a , góc $BAC = 30^\circ$. Biết đỉnh S cách đều ba điểm A, B, D . Đường thẳng SA hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

Lời giải.



Ta có: $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $BAC = 30^\circ \Rightarrow BAD = 60^\circ$.

$\Rightarrow$ Tam giác ABD đều cạnh a

$$\Rightarrow S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot AB \cdot \sin BAD = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$, G là trọng tâm tam giác ABD .

$$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \frac{2}{3} AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Lại có: đỉnh S cách đều ba điểm A, B, D và tam giác ABD đều $\Rightarrow SG \perp (ABCD)$.

$$\Rightarrow \left(SA; (ABCD) \right) = \angle SAG = 60^\circ.$$

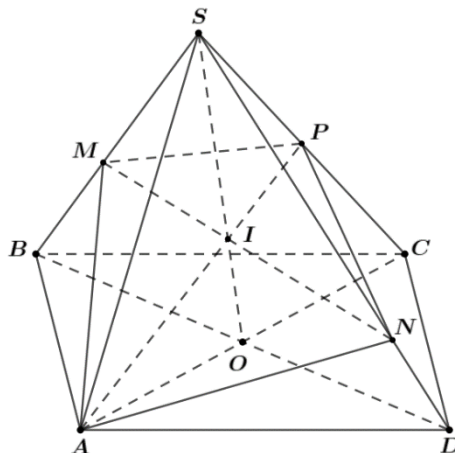
$$\text{Xét tam giác } SAG \text{ vuông tại } G : \tan SAG = \frac{SG}{AG} \Rightarrow SG = AG \cdot \tan SAG = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \tan 60^\circ = a.$$

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích V . Gọi P là trung điểm SC . Mặt phẳng (α) chứa AP và cắt hai cạnh SB, SD lần lượt tại M, N . Gọi V' là thể tích khối

chóp $S.AMPN$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{V'}{V}$ bằng

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$ và I là giao điểm của SO và AP . Suy ra MN đi qua trọng tâm I của tam giác SBD .

$$\text{Đặt } x = \frac{SB}{SM}, x \geq 1.$$

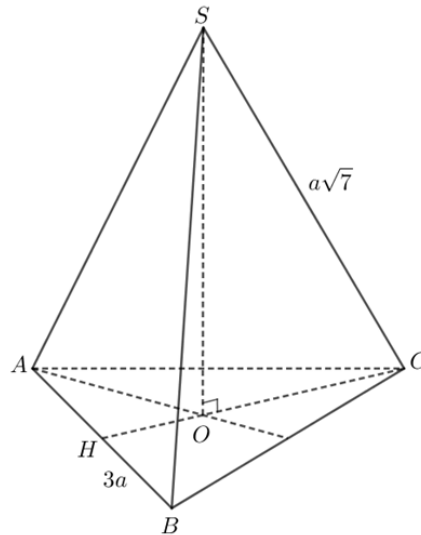
$$\text{Ta có } \frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = \frac{SA}{SA} + \frac{SC}{SP} = 3 \Leftrightarrow \frac{SD}{SN} = 3 - x \geq 1, \text{ suy ra } 1 \leq x \leq 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có } \frac{V'}{V} &= \frac{V_{S.AMP}}{V} + \frac{V_{S.ANP}}{V} = \frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.ANP}}{2V_{S.ADC}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} + \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(3-x)} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{x(3-x)} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{\left(\frac{x+3-x}{2} \right)^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{V'}{V}$ là $\frac{1}{3}$, xảy ra khi $x = 3 - x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (thỏa điều kiện).

Câu 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{7}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a .

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB và O là tâm của tam giác đều ABC .

$$\text{Ta có: } CH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CO = \frac{2}{3}CH = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Vì $SO \perp (ABC)$ và $OC \subset (ABC)$ nên ta có $SO \perp OC$.

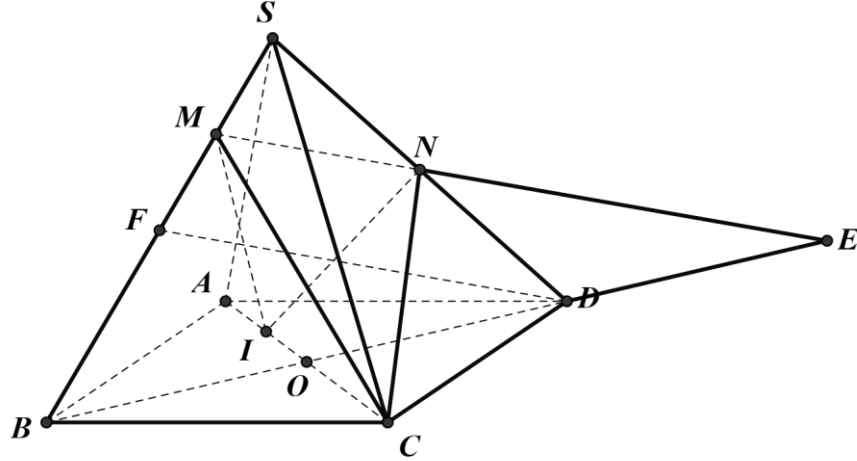
$$\text{Xét tam giác } SOC \text{ vuông tại } O: SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 - (a\sqrt{3})^2} = 2a.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC: S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABC : V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SO.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.2a.\frac{9a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và có thể tích bằng V . Gọi M, N, I lần lượt là các điểm nằm trên cạnh SB, SD sao cho $SM = \frac{1}{4}SB$, $SN = \frac{1}{2}SD$ và I là trung điểm AO . Xác định thể tích tứ diện $IMNC$ theo V .

Lời giải



Gọi $E = MN \cap BD$, F là trung điểm SB .

Suy ra $MN \parallel FD$ và $FD \parallel ME$.

$$\Rightarrow \frac{MN}{FD} = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{FD}{ME} = \frac{BF}{BM} = \frac{2}{3}. \text{ Từ đó } \Rightarrow \frac{MN}{ME} = \frac{1}{3}$$

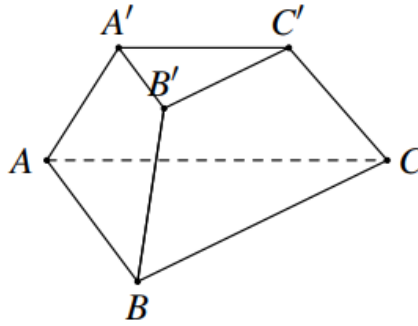
$$\text{Ta có: } \frac{V_{MNIC}}{V_{MEIC}} = \frac{MN}{ME} \cdot \frac{MI}{MI} \cdot \frac{MC}{MC} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \frac{V_{MEIC}}{V_{SABCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d(M; (ABCD)) \cdot S_{\Delta ICE}}{\frac{1}{3} \cdot d(S; (ABCD)) \cdot S_{\Delta ABCD}} = \frac{MB}{SB} \cdot \frac{\frac{1}{2} IC \cdot EO}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{9}{16} \quad (2).$$

$$\text{Nhân (1), (2) vế theo vế, suy ra: } \frac{V_{MNIC}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3}{16}$$

$$\text{Vậy: } V_{MNIC} = \frac{3}{16} V_{SABCD} = \frac{3}{16} V.$$

Câu 7: Tính thể tích của khối chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $3a$, $AB = 4a, A'B' = a$.



Lời giải

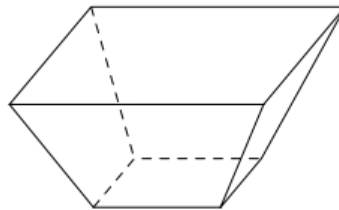
Diện tích tam giác đều ABC : $S = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(4a)^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}a^2$.

Diện tích tam giác đều $A'B'C'$: $S' = \frac{A'B'^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

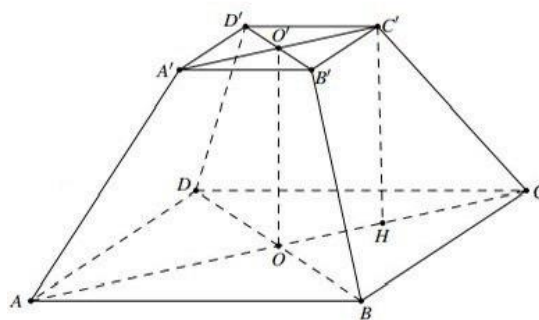
Thể tích khối chóp cụt là: $V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{S \cdot S'} + S')$.

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \left(4\sqrt{3}a^2 + \sqrt{4\sqrt{3}a^2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right) = \frac{21\sqrt{3}a^3}{4}.$$

Câu 8: Tính thể tích của một cái sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 80 cm , đáy nhỏ có cạnh bằng 40 cm và cạnh bên bằng 80 cm .



Lời giải



Xét tam giác vuông $HC'C$

Ta có: $OC = 40\sqrt{2}$, $O'C' = 20\sqrt{2}$ suy ra $C'H = \sqrt{80^2 - (40\sqrt{2} - 20\sqrt{2})^2} = 20\sqrt{14} \text{ (cm)}$.

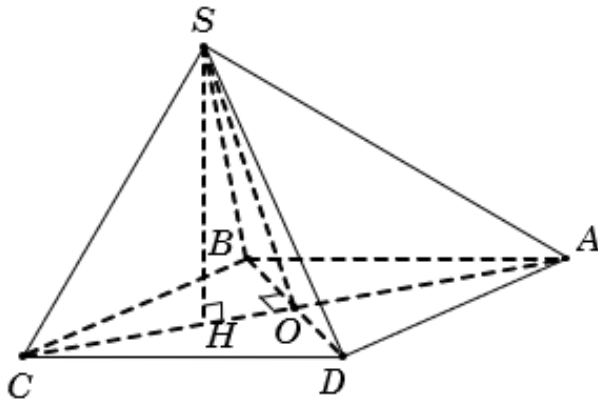
Suy ra $OO' = C'H = 20\sqrt{14}$ (cm).

Thể tích của cái sọt đựng đồ là: $V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{S.S'} + S')$.

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 20\sqrt{14} \cdot (6400 + \sqrt{6400 \cdot 1600} + 1600) \approx 279377,08 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ ($0 < x < \sqrt{3}$), tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng 1.
Để thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất thì x bằng

Lời giải



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD \Rightarrow OA = OC$. (1)

Theo bài ra, ta có $\triangle SBD = \triangle CBD \Rightarrow OS = OC$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $OS = OA = OC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại $S \Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + 1}$.

Suy ra $OA = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2}$ và $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \frac{\sqrt{3 - x^2}}{2}$.

Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = 2.OA.OB = \frac{\sqrt{(x^2 + 1)(3 - x^2)}}{2}$.

Ta có $SB = SC = SD = 1$, suy ra hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $BCD \rightarrow H \in AC$.

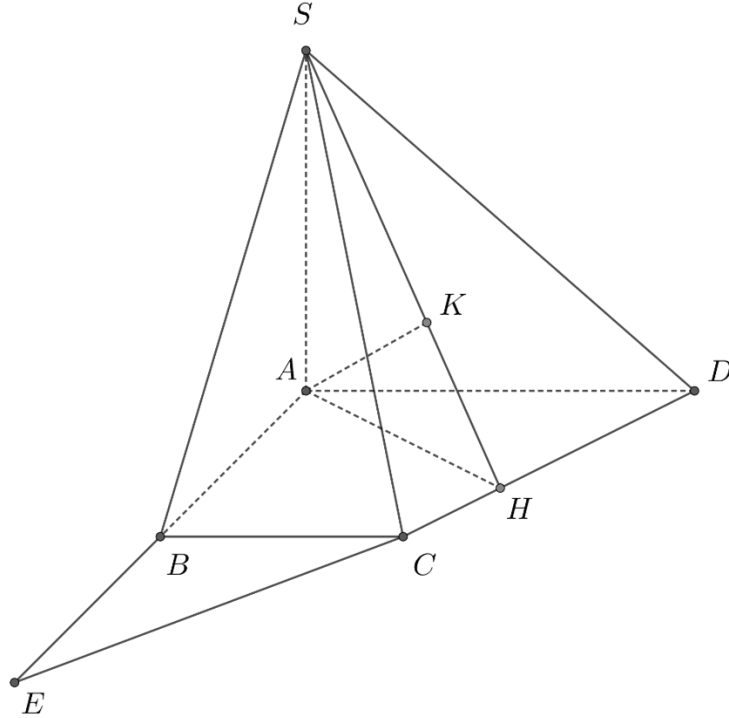
Trong tam giác vuông SAC , ta có $SH = \frac{SA.SC}{\sqrt{SA^2 + SC^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{(x^2 + 1)(3 - x^2)}}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{6} x \sqrt{3 - x^2} \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{x^2 + 3 - x^2}{2} \right) = \frac{1}{4}$.

Suy ra $V_{S.ABCD} \leq \frac{1}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{3 - x^2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 10: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A với đáy lớn $AD = 2a$, $BC = a$ và $AB = \frac{3a}{2}$. Mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ SA = (SAB) \cap (SAD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD).$$

Trong $(ABCD)$, gọi $E = AB \cap CD$ và kẻ $AH \perp CD$ tại H .

Trong (SAH) , kẻ $AK \perp SH$ tại K .

$$\text{Vì } AB \cap (SCD) = E \text{ nên } \frac{d(B, (SCD))}{d(A, (SCD))} = \frac{EB}{EA} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } d(A, (SCD)) = 2d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAH) \Rightarrow CD \perp AK.$$

Mà $AK \perp SH$. Suy ra $AK \perp (SCD)$.

$$\text{Do đó } AK = d(A, (SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(3a)^2} = \frac{13}{36a^2}.$$

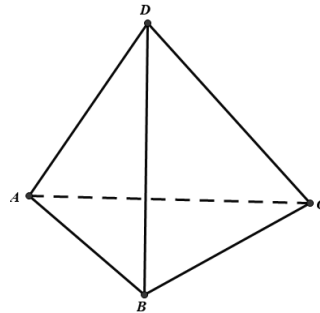
$$\frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AK^2} - \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} - \frac{13}{36a^2} = \frac{11}{36a^2} \Rightarrow SA = \frac{6\sqrt{11}a}{11}.$$

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{AD+BC}{2} \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{11}a}{11} \cdot \frac{2a+a}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{9\sqrt{11}a^3}{22} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 11: Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng $\frac{1}{6}$ và số đo góc ACB bằng 45° . Biết rằng ba cạnh AD, BC, AC thỏa mãn điều kiện $AD + BC + \frac{AC}{\sqrt{2}} = 3$. Độ dài cạnh CD bằng bao nhiêu?

Lời giải.



$$\text{Ta có } V_{A.BCD} = V_{D.ABC} \leq \frac{1}{3} AD \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} AD \cdot \left(\frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin 45^\circ \right).$$

$$\text{Do } V_{A.BCD} = \frac{1}{6} \text{ suy ra } \frac{1}{6} \leq \frac{1}{6} AD \cdot BC \cdot \frac{AC}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow AD \cdot BC \cdot \frac{AC}{\sqrt{2}} \geq 1 \quad (1)$$

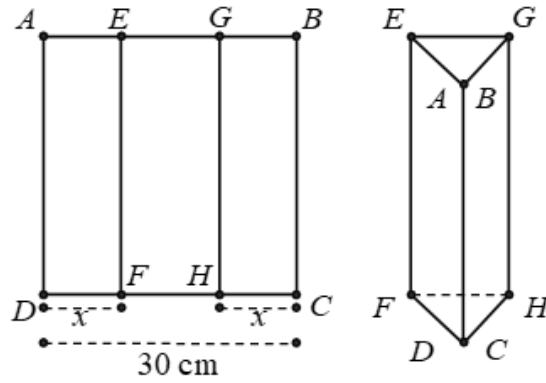
Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$AD + BC + \frac{AC}{\sqrt{2}} \geq 3\sqrt[3]{AD \cdot BC \cdot \frac{AC}{\sqrt{2}}}, \text{ do } AD + BC + \frac{AC}{\sqrt{2}} = 3 \Rightarrow AD \cdot BC \cdot \frac{AC}{\sqrt{2}} \leq 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} DA \perp (ABC) \\ AD \cdot BC \cdot \frac{AC}{\sqrt{2}} = 1 \\ AD = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} DA \perp (ABC) \\ AD = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 1 \end{cases}.$$

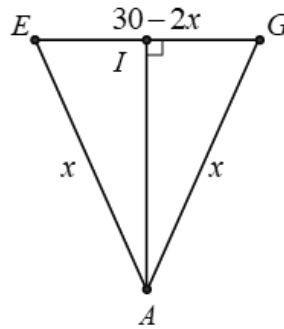
$$\text{Suy ra } DC = \sqrt{AD^2 + AC^2} = \sqrt{3}. \text{ Vậy } DC = \sqrt{3}.$$

Câu 12: Một tấm kẽm chữ nhật $ABCD$ có $AB = 30\text{cm}$, $AD = 40\text{cm}$. Người ta gập tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.



Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là:

Lời giải



Đường cao lăng trụ là $AD = 40\text{cm}$ không đổi. Để thể tích lăng trụ lớn nhất chỉ cần diện tích đáy lớn nhất.

Trong tam giác AEG cân tại A, gọi I là trung điểm cạnh $EG \Rightarrow AI \perp EG$

Khi đó $IG = 15 - x$, ($0 < x < 15$)

$$\text{Có } AI = \sqrt{x^2 - (15 - x)^2} = \sqrt{30x - 225}, x \in \left(\frac{15}{2}; 15\right).$$

$$S_{\triangle AEG} = \frac{1}{2} AI \cdot EG = \frac{1}{2} (30 - 2x) \sqrt{30x - 225} = \sqrt{15} \cdot \sqrt{(15 - x)^2 (2x - 15)}$$

Vậy ta cần tìm $x \in \left(\frac{15}{2}; 15\right)$ để $S(x) = (15 - x)^2 (2x - 15)$ lớn nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương $15 - x$, $15 - x$, $2x - 15$ ta được

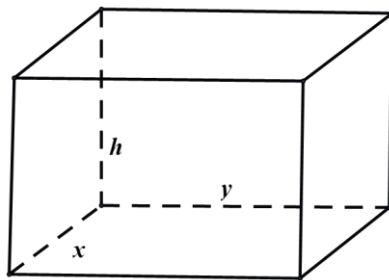
$$S(x) = (15 - x)^2 (2x - 15) \leq \left(\frac{15 - x + 15 - x + 2x - 15}{3} \right)^3 = 125$$

Vậy diện tích đáy lớn nhất là $S = 125\text{cm}^2$ đạt được khi $15 - x = 2x - 15 \Leftrightarrow x = 10\text{cm}$

Khi đó thể tích lớn nhất là $V = S \cdot h = 125 \cdot 40 = 5000\text{cm}^3$ đạt được khi $x = 10\text{cm}$.

Câu 13: Một phòng học có dạng là một hình hộp chữ nhật có chiều dài là 8m , chiều rộng là 6m , thể tích là 192m^3 . Người ta muốn quét vôi trần nhà và bốn bức tường phía trong phòng. Biết diện tích các cửa bằng 10m^2 . Tính diện tích cần quét vôi.

Lời giải



Gọi x, y, h ($x, y, h > 0$) lần lượt là chiều rộng, chiều dài và chiều cao của phòng học.

Ta có: $V = xyh \Leftrightarrow h = \frac{V}{xy} = \frac{192}{6.8} = 4 \text{ (m)}$

Diện tích xung quanh phòng học là $2xh + 2hy = 2.6.4 + 2.4.8 = 112 \text{ (m}^2\text{)}$.

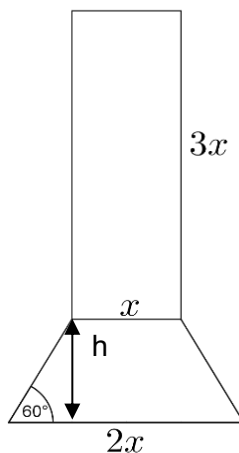
Diện tích trần nhà là $x.y = 6.8 = 48 \text{ (m}^2\text{)}$.

Diện tích cần quét vôi là $112 + 48 - 10 = 150 \text{ (m}^2\text{)}$.

Câu 14: Một ống khói có cấu trúc gồm một khối chóp cắt tứ giác đều có thể tích V_1 và một khối hộp chữ nhật có thể tích V_2 ghép lại với nhau như hình bên dưới. Cho biết bản vẽ hình chiếu của ống khói với phương chiếu trùng với phương của một cạnh đáy khối chóp cắt, hãy tính tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$.



Lời giải



Hình chiếu của ống khói gồm một hình chữ nhật có chiều dài là $3x$, chiều rộng là x và một hình thang cân có độ dài 2 đáy là x và $2x$.

Do khối chóp cắt tứ giác đều có 2 đáy đều là hình vuông nên ta thấy một mặt của khối hộp chữ nhật là hình vuông cạnh x (mặt tiếp xúc của 2 khối). Từ đây ta có 3 kích thước của khối hộp chữ nhật là x , x , và $3x$.

Đối với khối chóp cắt tứ giác đều, 2 đáy lần lượt có độ dài cạnh là x và $3x$. Nếu ta gọi h là chiều cao của hình thang cân trong hình thì h cũng đồng thời là chiều cao của khối chóp cắt.

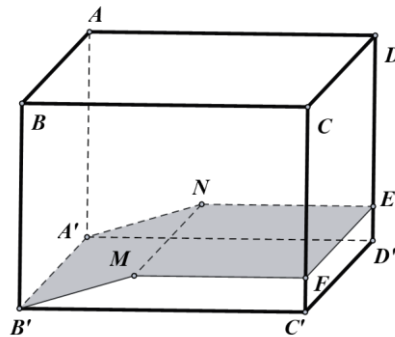
Thể tích phần ống dạng khối hộp chữ nhật: $V_2 = x.x.3x = 3x^3$.

Dựa theo công thức tính được thể tích phần khối chóp cắt:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot h \left(x^2 + x.2x + (2x)^2 \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{2} \cdot \tan 60^\circ \right) \cdot 7x^2 = \frac{7\sqrt{3}}{6} x^3.$$

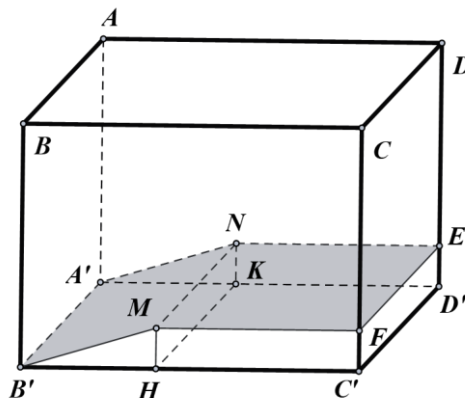
Vậy tỉ số thể tích: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7\sqrt{3}}{18}$.

Câu 15: Một bể bơi ban đầu có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ sau đó người ta làm lại mặt đáy như hình vẽ.



Biết rằng $A'B'MN$ và $MNEF$ là các hình chữ nhật, $(MNEF) \parallel (A'B'C'D')$, $AB = 10$ m, $AD = 30$ m, $A'A = 20$ m, $MF = DE = 17$ m. Tỉ số thể tích của bể sau khi làm lại mặt đáy với thể tích của bể lúc ban đầu gần nhất với số nào dưới đây?

Lời giải



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Ta có thể tích khối lăng trụ tam giác

$$V_{B'MH.A'NK} = \frac{1}{2} B'H.HM.A'B' = \frac{1}{2} \cdot (30 - 17) \cdot (20 - 17) \cdot 10 = 195.$$

Thể tích khối hộp chữ nhật $V_{MNEF.HKD'C'} = HM.MF.MN = 3.17.10 = 510$.

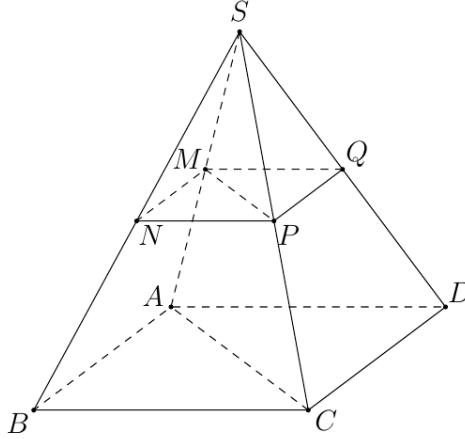
Suy ra thể tích của bể bơi sau khi làm lại mặt đáy là

$$V_s = AB.A'A.AD - (195 + 510) = 10.20.30 - 705 = 5295 m^3.$$

Ta có tỉ số thể tích giữa hai bể bơi trước và sau là $\frac{V_s}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{5249}{10.20.30} \approx 0,87$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tỉ số thể tích của khối chóp $S.MNPQ$ và khối chóp $S.ABCD$ là

Lời giải



Gọi thể tích của khối chóp $S.MNPQ$ và khối chóp $S.ABCD$ lần lượt là V' và V .

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD}$, do đó $V = 2V_{S.ABC} = 2V_{S.ACD}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{V'}{V} &= \frac{V_{S.MNP} + V_{S.MPQ}}{V} = \frac{V_{S.MNP}}{V} + \frac{V_{S.MPQ}}{V} = \frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.MPQ}}{2V_{S.ACD}} = \frac{1}{2} \left(\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} + \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SP}{SC} \cdot \frac{SQ}{SD} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$